

Министерство образования и науки РФ
Нижекамский химико-технологический институт (филиал)
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»

Д.Б. Вафин

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ**

ЧАСТЬ 2

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Нижекамск

2011

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я7
В 23

Вафин, Д.Б. Задания для самостоятельной работы по физике. Часть 2 : учебное пособие / Д.Б. Вафин. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2011. – 116 с.

Приведены основные формулы и определения по следующим разделам физики: электродинамика, электромагнетизм, колебания и волны, показаны примеры решения и оформления задач. Даны задания для организации самостоятельной работы по физике в виде выполнения контрольных расчетно-графических работ (РГР 21, 22). В контрольные работы включены задания по перечисленным разделам физики. Каждое задание содержит 35 вариантов задач. В приложении приведены основные справочные данные, необходимые для решения задач.

Предназначено для студентов инженерных специальностей.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) КГТУ.

Рецензенты:

Махиянов Н., кандидат физико-математических наук;

Шарипов М.Р., кандидат философских наук.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я7

© Вафин Д.Б., 2011

© Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2011

Содержание

Введение.....	4
Из истории электродинамики.....	4
Волновые процессы.....	6
1 ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.....	8
1.1 Основные формулы и определения.....	8
1.2 Примеры решения и оформления задач.....	17
1.3 Задания для расчетно-графической работы РГР 21.....	35
2 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....	49
2.1 Основные формулы и определения.....	49
2.2 Примеры решения задач.....	64
2.3 Задачи для РГР 22 по электромагнетизму.....	72
3 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.....	80
3.1 Основные законы и формулы.....	80
3.2 Примеры решения и оформления задач.....	96
3.3 Задачи для РГР 22 по колебаниям и волнам.....	106
Литература.....	113
Приложение.....	113

Введение

Из истории электродинамики

В промышленности и в быту области применения законов электромагнетизма очень большие. До настоящего времени общий вид уравнений электромагнетизма практически не изменился, несмотря на то что уравнения электродинамики Максвеллом были сформулированы еще в 1873 году. В то же время за период овладения человечеством законов электромагнетизма накопилось достаточно много парадоксальных электромагнитных явлений, природа которых остается для нас загадочной и во многом непонятной. Чтобы уметь объяснить загадочные явления, сначала необходимо овладеть достижениями современной науки об электричестве, по колебаниям и волнам. Затем уже кому-то из вас, может быть, удастся создать и новую теорию электромагнетизма.

Еще в глубокой древности люди знали, что янтарь, потертый о шерсть, приобретает способность притягивать легкие предметы. Первые научные шаги в изучении электричества и магнетизма были сделаны только в конце 16 века врачом английской королевы Елизаветы Уильямом Гильбертом (1540 – 1603). В своей монографии «О магните, магнитных телах и о большом магните – Земля», Гильберт впервые ввел понятие «магнитное поле Земли». Экспериментируя с различными материалами, он обнаружил, что свойством притягивать легкие предметы обладает не только янтарь, потертый о шёлк, но и многие другие тела: алмаз, хрусталь, смола, сера и т.д. Эти вещества он назвал «электрические», то есть «как янтарь». Так возник термин «электричество».

Первую теорию электрических явлений попытался создать французский исследователь Шарль Дюфэ (1698 – 1739). Он установил, что существует электричество двух родов: «Один род, — писал он, — я назвал «стеклянным» электричеством, другой — «смоляным». Особенность этих двух родов электричества: отталкивать однородное с ним и притягивать противоположное...» (1733 г.). Дальнейшее развитие теория электричества получила в работах американского учёного Бенджамина Франклина (1706 – 1790). Он ввел понятие «положительное» и «отрицательное» электричество, установил закон сохранения электрического заряда, исследовал «атмосферное электричество», предложил идею громоотвода.

В 1785 году французский исследователь Шарль Кулон (1736 – 1806) экспериментально установил закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов и позднее — магнитных полюсов. Закон Кулона — фундамент электростатики. Он позволил, наконец-то, установить единицу измерения электрического заряда и магнитных масс. Открытие этого закона стимулировало разработку математической теории электрических и магнитных явлений.

Впрочем, долгое время (ещё со времён Гильберта) считалось, что электричество и магнетизм не имеют ничего общего. Только в 1820 году датчанин Ханс Эрстед (1777 – 1851) обнаружил влияние электрического тока на магнитную стрелку, которое он объяснил тем, что «вокруг проволоки с током образуется магнитный вихрь». Иными словами Эрстед установил, что электрический ток является источником магнитного поля. Это положение стало первым из двух основных законов электродинамики. Вторым был установлен экспериментально английским физиком Майклом Фарадеем (1791– 1867). В 1831 году он впервые наблюдал явление «магнитоэлектрической индукции», когда в проводящем контуре возникал индукционный электрический ток при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур.

В конце XIX столетия разрозненные результаты исследований электромагнитных явлений обобщил молодой шотландский физик Джеймс Кларк Максвелл (1831– 1879). Он создал классическую теорию электродинамики, в которой, в частности, предсказал существование электромагнитных волн, выдвинул идею электромагнитной природы света, вычислил объемную плотность энергии электромагнитной волны, рассчитал давление, которое должна производить электромагнитная волна при падении на поглощающую поверхность.



Рис. 1. Д.К. Максвелл

Выводы теории Максвелла нашли экспериментальное подтверждение в работах Генриха Герца (1857 – 1894), П.Н. Лебедева (1866 – 1912), А.А. Майкельсона (1852 – 1931), А.С. Попова (1859 – 1906) и многих других исследователей. Главное значение электродинамика Максвелла в том, что она стимулировала бурный расцвет целого ряда прикладных наук, таких, как электротехника, электроника, информатика и многие другие.

До создания классической теории электродинамики в течение более двух тысячелетий царствовала механистическая теория окружающего мира. Все загадки природы – от свойств атомов до проблем космоса – люди пытались разгадать, опираясь на законы механики. Электродинамика Максвелла открыла принципиально новый подход к решению всех этих задач.

Ход развития оптики и электродинамики привел к признанию существования электромагнитного поля как нового вида физической реальности. В то же время целый ряд экспериментальных и теоретических исследований показал, что в природе существуют дискретные элементарные объекты в рамках электромагнитной картины мира. Само электричество оказалось состоящим из малых заряженных частиц – электронов. В 1911 г. Э. Резерфорд показал, что положительное электричество в атомах также сконцентрировано в неких частицах, а не рассредоточено по всему атому. Атом оказался некоей «солнечной системой» в миниатюре. В центре находится ядро атома, состоящее из положительно заряженных протонов и электрически нейтральных нейтронов, а вокруг, как спутники, вращаются отрицательно заряженные электроны.

Волновые процессы

Колебательное движение является одной из наиболее распространенных форм движения тел в природе. Если сравнить процессы в пружинном, математическом маятнике и в колебательном контуре колебания атомов в молекуле относительно центра масс, то обнаруживается поразительная аналогия между этими явлениями, которые, на первый взгляд, не имеют между собой ничего общего. Однако физика колебательного процесса во всех этих системах примерно одинакова, эти процессы описываются одинаковыми понятиями и одинаковыми уравнениями. В силу этого целесообразно использование единого подхода к изучению колебаний различной физической природы. Такой подход к изучению колебаний позволяет переносить закономерности, полученные при изучении одного вида колебаний на колебания другой природы. Поэтому в данном пособии задания по механическим и электромагнитным колебаниям рассматриваются в одном разделе. Вводимые при рассмотрении электромагнитных колебаний в колебательном контуре понятия, применяются и в цепях переменного тока.

Рождение волны при падении камешка в воду – явление сложное. Упрощенно его можно представить так: камешек, падая на дно, увлекает за собой частицы жидкости. Эти частицы, выведенные из

состояния равновесия, приходят в движение под действием ряда сил, среди которых и квазиупругая сила поверхностного натяжения. Эта сила определяет характер движения возмущенных частиц – вертикальные колебания. Благодаря силе вязкости, колебания из «эпицентра» передаются соседним областям жидкости, более удаленным от места падения камешка. Так сигнал (колебания жидкости), возникший в месте падения, распространяется по поверхности водоема. Волновой процесс связан с переносом энергии, но никак не массы.

Падение камешка в воду порождает серию волн на поверхности: череду гребней и впадин. Расстояние между двумя соседними гребнями (или впадинами) называется *длиной волны*. Самая «первая» волна, отделяющая область поверхности, захваченную волновым процессом, от невозмущенных еще областей, называется *волновым фронтом*. Видно, как фронт волны перемещается по поверхности. Скорость этого движения – *скорость волны (фазовая скорость)*. Фазовая скорость волны отличается от скорости движения частиц среды в волне.

Волновые процессы различаются по тому, как возмущения, переносимые волной, ориентированы относительно направления их распространения. Если в акустической волне смещение частиц среды происходит в направлении распространения волны, то такая волна называется *продольной*. Если смещение частиц и направление распространения волны взаимно – перпендикулярны, то это – *поперечная волна*.

Упругие *поперечные* волны существуют только в твердых телах. *Продольные* волны можно наблюдать как в твердых телах, так в жидкостях и газах.

В *электромагнитной волне* меняются напряженности электрического **E** и магнитного **H** полей. При этом они колеблются перпендикулярно направлению распространения волны **u**. Поэтому электромагнитные волны относят к классу поперечных волн. Длины электромагнитных волн меняются в широчайшем диапазоне: от 10^{-4} до 10^{15} Å. Это различные радиоволны, видимый свет, рентгеновское и гамма-излучение.

Волновой характер может носить процесс распространения в пространстве сигнала произвольной формы и продолжительности. Однако наибольший интерес представляют гармонические волны. Такие волны переносят в пространстве гармонические колебания. Более сложные волны можно представить как суперпозицию гармонических волн.

1 ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1.1 Основные формулы и определения

Электрический заряд, заключенный в единице объема, называется объемной плотностью зарядов:

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

Концентрацией зарядов определенного знака называется отношение числа зарядов к занимаемому объему

$$n_{\pm} = N_{\pm} / \Delta V,$$

где ΔN_{\pm} – число заряженных частиц соответствующего знака в объеме ΔV . Так как у большинства заряженных частиц заряд равняется элементарному заряду e_{\pm} с соответствующим знаком, то объемная плотность зарядов

$$\rho = e_{+}n_{+} + e_{-}n_{-} = \rho_{+} + \rho_{-},$$

где $\rho_{\pm} = e_{\pm}n_{\pm}$ – объемная плотность зарядов соответствующего знака.

Если в проводнике поддерживать электрическое поле E , то кроме хаотического теплового движения свободные электрические заряды (частицы) начнут перемещаться направленно: положительные – по полю, отрицательные – против поля (рис. 1.1).

Упорядоченное движение электрических зарядов называется электрическим током.

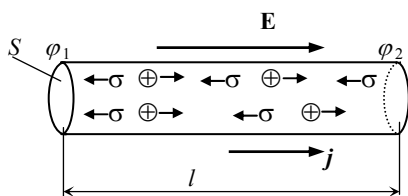


Рис. 1.1

За положительное направление электрического тока принято направление движения положительных зарядов. В металлах носителями электричества являются валентные электроны. В электролитах и в плазме в переносе электричества участвуют положительные и отрицательные ионы.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока, являющаяся скалярной величиной, равной количеству электрического заряда, проходящего через проводник за единицу времени:**

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где $dq = I dt$ – количество электричества, проходящее через проводник за элементарный промежуток времени dt .

В системе СИ единица измерения силы тока – ампер (А) – является основной величиной, и определяется из рассмотрения магнитного взаимодействия двух параллельных токов.

Распределение тока по поперечному сечению проводника определяется *плотностью тока*

$$j = \frac{dI}{dS}, \text{ А/м}^2,$$

где dI – сила тока, проходящего через площадь элементарного поперечного сечения проводника dS .

Плотность тока – вектор, направленный в сторону средней скорости направленного движения положительных зарядов и численно равный количеству электричества, проходящего через единичную площадку, перпендикулярную этому направлению, за единицу времени.

Пусть

$$\mathbf{u}_{\pm} = \sum_{i=1}^{\Delta N} \mathbf{v}_i^{\pm} / \Delta N_{\pm} -$$

средняя скорость упорядоченного движения зарядов соответствующего знака. Тогда

$$\mathbf{j}_+ = e_+ n_+ \mathbf{u}_+; \quad \mathbf{j}_- = e_- n_- \mathbf{u}_-$$

называется плотностью тока положительных и отрицательных зарядов соответственно. Плотность результирующего тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-.$$

Плотность тока в металлах

$$\mathbf{j} = -e n \mathbf{u},$$

где n – концентрация свободных электронов; $-e$ – заряд электрона; \mathbf{u} – скорость направленного движения электронов (*скорость дрейфа*).

Если за любые равные промежутки времени через любое сечение проводника проходят одинаковые количества электричества и направление движения зарядов не изменяется, то такой ток называется *постоянным*. В этом случае

$$I = q/t, \quad \text{и} \quad I = jS,$$

где q – электрический заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность S за конечный промежуток времени t .

Для возникновения электрического тока необходимо поддерживать электрическое поле внутри проводника. Устройство, предназначенное для этой цели, называется *источником тока*.

За счет создаваемого поля сторонних сил напряженностью $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ заряды движутся внутри источника тока против сил электрического поля, благодаря чему на концах внешней цепи поддерживается разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и в цепи течет постоянный ток I (рис.1.2).

Сторонние силы, перемещая электрические заряды внутри источника тока и по внешней цепи, совершают работу

$$A_{cm} = q_0 \oint \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{F}_{cm} d\mathbf{l},$$

где $\mathbf{F}_{cm} = q_0 \mathbf{E}_{cm}$ – сторонняя сила, действующая на пробный заряд q_0 .

Скалярная величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного, точечного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС), действующей в цепи:

$$J = \frac{A_{cm}}{q_0} = \oint \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l}, \text{ В(вольт).}$$

На пробный заряд q_0 действуют также силы электрического поля $\mathbf{F}_E = q_0 \mathbf{E}$. Результирующая сила определяется как

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{cm} + \mathbf{F}_E = q_0(\mathbf{E}_{cm} + \mathbf{E}).$$

Работа результирующей силы над зарядом q_0 на участке 1 – 2:

$$A_{1-2} = q_0 \int_1^2 \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l} + q_0 \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Напряжением на неоднородном участке цепи 1 – 2 называется скалярная величина, определяемая работой, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного точечного заряда на данном участке цепи:

$$U_{1-2} = \frac{A_{cm} + A_{эл}}{q_0} = \int_1^2 \mathbf{E}_{cm} d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = J_{1-2} + (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где A_{cm} , $A_{эл}$ – работа сторонних и электрических сил по перемещению заряда q_0 на участке цепи соответственно.

Немецкий физик Георг Симон Ом (1787 – 1854) экспериментально установил, что сила тока в металлическом проводнике прямо пропорциональна разности потенциалов на его концах: $I - U$. Это утверждение называется *законом Ома* для однородного участка цепи.

Сила тока в проводнике зависит не только от напряжения, но и от того сопротивления, которое проводник оказывает потоку свободных зарядов. Чем выше сопротивление, тем меньше сила тока при данном напряжении:

$$I = \frac{U}{R},$$

где R - электрическое сопротивление.

Электрическое сопротивление определяется по формуле: $R = U/I$. Единицей сопротивления служит Ом: $1\text{ Ом} = 1\text{ В}/1\text{ А}$. Обратная величина $G = 1/R$ называется *проводимостью*. $[G] = \text{Ом}^{-1} = \text{См}$ (сименс).

В рамках классической электронной теории проводимости металлов можно получить закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad \text{или в векторной форме: } \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

Здесь $\gamma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m_e\bar{v}}$ - удельную электропроводность металла, где n -

концентрация свободных электронов в металле; $\bar{\lambda}$ - средняя длина свободного пробега электронов; m_e - масса электрона; $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}$ - среднеарифметическая скорость теплового движения электронов.

Величина, обратная удельной электропроводности, называется *удельным сопротивлением*: $\rho = 1/\gamma$.

Сопротивление участка проводника R :

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Сопротивление металлов возрастает с ростом температуры. Опыт показывает, что в первом приближении изменение удельного сопротивления, следовательно, и сопротивления с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 - удельное сопротивление при $t = 0^\circ\text{C}$; α - температурный коэффициент сопротивления металлов.

Участок цепи, содержащий источник тока и другие элементы, называется неоднородным участком (рис.1.2). Закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R + r} = \frac{U}{R + r},$$

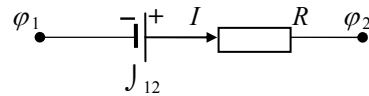


Рис.1.2

где R - сопротивление внешней цепи; r - внутреннее сопротивление источника тока, который сам по себе обладает некоторым сопротивлением.

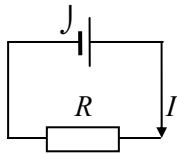


Рис.1.3

Для замкнутой (полной) цепи (рис.1.3) начальная и конечная точки перемещения зарядов совпадают. Поэтому $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. В результате закон Ома приобретает вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

В 1841 г. Д. Джоуль и независимо от него в 1842 г. русский физик Э.Х. Ленц экспериментально установили, что **количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током в участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на электрическое сопротивление этого участка цепи и на время его прохождения:**

$$Q = I^2 R t.$$

В рамках классической теории проводимости выводится закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \gamma E^2,$$

где w – удельная тепловая мощность тока, это энергия, выделяемая в единице объема проводника за единицу времени.

Мощность электрического тока, т.е. теплота, выделяемая в проводнике за одну секунду

$$W = wV = j \frac{U}{l} Sl = IU,$$

так как $jS = I$ – сила тока.

За произвольное время t в проводнике выделяется теплота

$$Q = Wt = I U t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t.$$

При последовательном соединении проводников (резисторов) через все резисторы течет один и тот же ток (рис.1.4)

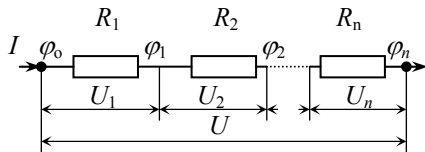


Рис.1.4

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n.$$

Напряжение между концами цепи равняется сумме напряжений на отдельных резисторах:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Суммарное сопротивление цепи:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

При параллельном соединении резисторов (рис. 1.5) ко всем резисторам приложена одна и та же разность потенциалов, т.е.

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n.$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Расчет разветвленных цепей постоянного тока, содержащих несколько замкнутых контуров, обычно производят на основе двух правил Кирхгофа, которые немецкий физик Г. Кирхгоф сформулировал в середине XX века на основе законов сохранения заряда и Ома.

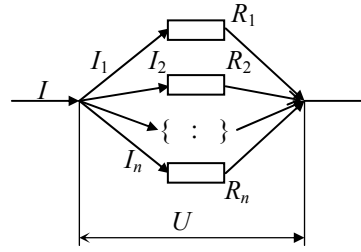


Рис.1.5

В цепь любой сложности входят элементы трех простейших видов: 1) *узлы*, в которых сходятся более чем два проводника; 2) *участки цепи*, под которыми понимаются непрерывная часть цепи между двумя узлами; 3) *замкнутые контуры* из нескольких участков.

Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла – отрицательным. Направление и сила тока на участке не меняются.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_i = 0.$$

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников токов, входящих в данный контур:

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{j=1}^M \mathcal{E}_j.$$

При расчете цепей с применением правил Кирхгофа необходимо придерживаться следующей последовательности:

1) Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи. Действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, если отрицательным – его истинное направление противоположно выбранному направлению.

2) Произвольно выбрать направление обхода контуров (для всех контуров одинаковое).

3) Произведение $I_i R_i$ взять с положительным знаком, если произвольно выбранное направление тока на данном участке совпадает с направлением обхода контура. ЭДС J_j взять положительной, если при обходе контура первым встречается отрицательный полюс источника тока.

4) Необходимо составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны войти все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи). Выписывая очередное уравнение, необходимо следить, чтобы оно содержало хотя бы одну величину, не вошедшую в предшествующие уравнения. Это обеспечить линейную независимость системы уравнений.

В электролитах электрический ток – это направленное движение ионов. Электрический ток в электролитах сопровождается выделением на электродах составных частей растворенных веществ и данное явление называется *электролизом*. Основные законы электролиза были экспериментально установлены в 1834 г. М. Фарадеем.

Первый закон электролиза (первый закон Фарадея): ***масса выделившегося на электроде вещества пропорциональна электрическому заряду q , прошедшему через электролит:***

$$m = k q,$$

где k – *электрохимический эквивалент* вещества, зависит от химической природы вещества.

Второй закон электролиза (второй закон Фарадея): ***электрохимические эквиваленты различных веществ пропорциональны их химическим эквивалентам:***

$$k = \frac{1}{F} \frac{\mu}{Z},$$

где $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль – число Фарадея.

Химическим эквивалентом иона называется отношение молярной массы μ иона к его валентности Z :

$$k_x = \mu / Z.$$

Объединив два закона Фарадея, можно получить объединенный закон электролиза

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{Z} I t.$$

Опыты показали, что закон Джоуля–Ленца справедлив и для электролитов. Плотность электрического тока в электролитах равна векторной сумме плотностей токов положительных и отрицательных зарядов

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_- = q_+ n_+ \bar{\mathbf{u}}_+ - q_- n_- \bar{\mathbf{u}}_- ,$$

где q_+ и q_- , n_+ и n_- , \bar{u}_+ и \bar{u}_- – заряды (модули), концентрации и скорости упорядоченного движения (дрейфа) положительных и отрицательных ионов в электрическом поле. Скорости дрейфа ионов также пропорциональны напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$\bar{u}_+ = u_+ \mathbf{E}, \quad \bar{u}_- = -u_- \mathbf{E},$$

где u_+ и u_- – положительные величины, называемые *подвижностями ионов*. В результате плотность тока в электролите можно представить в виде

$$\mathbf{j} = (q_+ n_+ u_+ + q_- n_- u_-) \mathbf{E}.$$

В электролитах избыточных объемных зарядов нет, поэтому

$$q_+ n_+ = q_- n_- \quad \text{и}$$

$$\mathbf{j} = q_+ n_+ (u_+ + u_-) \mathbf{E}.$$

Таким образом, для плотности тока в электролитах выполняется закон Ома.

Заряд положительного иона равен произведению элементарного заряда на валентность иона: $q_+ = e Z_+$. Поэтому закон Ома в электролитах можно записать в виде

$$\mathbf{j} = e Z_+ n_+ (u_+ + u_-) \mathbf{E} = \mathbf{E} / \rho.$$

Отсюда удельное электрическое сопротивление электролита

$$\rho = [e Z_+ n_+ (u_+ + u_-)]^{-1}.$$

Концентрация ионов зависит от *степени диссоциации*, характеризующейся *коэффициентом диссоциации* α :

$$\alpha = n / n_0,$$

где n , n_0 – концентрация ионов и молекул растворенного вещества. С учетом данного определения и того, что концентрации, а также валентности положительных и отрицательных ионов обычно одинаковы, формулу для удельной электропроводимости раствора можно представить в виде

$$\gamma = e Z \alpha n_0 (u_+ + u_-).$$

Электрический ток в газах называется электрическим разрядом или газовым разрядом.

При небольших значениях напряжения U между электродами сила тока I пропорциональна напряжению U . В этом случае выполняется закон Ома

$$\mathbf{j} = en(u_+ + u_-) \mathbf{E},$$

где n – концентрация ионов каждого знака; u_+ и u_- – подвижности положительных и отрицательных ионов.

Испускание электронов нагретыми металлами называется термоэлектронной эмиссией.

Зависимость силы анодного тока I_a от анодного напряжения U_a в двухэлектродных вакуумных лампах описывается нелинейной формулой Богуславского – Ленгмюра:

$$I_a = BU_a^{3/2},$$

где B – коэффициент пропорциональности, зависящий только от формы, размеров и взаимного расположения электродов (от температуры катода и его материала не зависит).

Опыты показали, что сила тока насыщения быстро возрастает с увеличением температуры катода. Плотность тока насыщения удовлетворяет формуле Ричардсона – Дэшмана

$$j_n = B' T^2 \exp[-A/(kT)],$$

где $B' = 1,2 \cdot 10^6 (1 - r)$, $A/(m^2 \cdot K^2)$, (теоретически $B' = em_e k^2 / (2\pi^2 \hbar^3)$ – универсальная постоянная, но в связи с поверхностными эффектами различна для разных металлов), здесь r – коэффициент отражения электронов от потенциального барьера на поверхности катода; A – работа выхода электрона из металла; k – постоянная Больцмана; T – температура катода.

Работа выхода измеряется в *электрон – вольтах*. Один электрон – вольт, это энергия, которую приобретает элементарный заряд, ускоряясь под разностью потенциалов в один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме для собственной проводимости полупроводника можно записать в виде

$$\mathbf{j} = en_o (u_e + u_d) \mathbf{E},$$

где u_e , u_d – подвижности электронов и дырок соответственно.

Удельная электропроводимость собственного полупроводника

$$\gamma = en_o (u_e + u_d).$$

В квантовой физике используя функцию Ферми–Дирака можно получить следующую формулу для концентрации электронов и дырок в чистых полупроводниках:

$$n_o = (2/h^3)(2\pi kT \sqrt{m_{npz} m_{npd}})^{3/2} \exp(-\Delta W/(2kT)),$$

где h – постоянная Планка; m_{npz} и m_{npd} – эффективные массы электрона и дырки; ΔW – энергия активации (ширина запрещенной зоны).

Зависимость удельной электропроводимости от температуры можно представить в виде

$$\gamma = \gamma_o \exp(-\Delta W/(2kT)),$$

где γ_o – постоянная, зависящая от рода полупроводника.

Если два различных металла привести в тесное соприкосновение, то между ними возникает разность потенциалов, называемая *контактной разностью потенциалов*. Суммарная контактная разность потенциалов двух металлов

$$\Delta\varphi = \frac{A_2 - A_1}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

Немецкий физик Т. Зеебек в 1821 г. обнаружил, что в замкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных разнородных металлов, контакты которых имеют разные температуры, возникает *термоэлектродвижущая сила* (термо – ЭДС), пропорциональная разности температур в контактах:

$$J = J_o(T_1 - T_2),$$

где J_o – удельная термо ЭДС; $(T_1 - T_2)$ – разность температур спаев.

В рамках классической теории проводимости

$$J_o = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2},$$

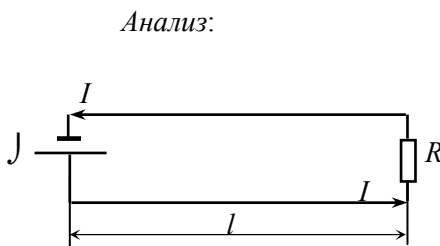
и практически не зависит от температуры, так как концентрации свободных электронов n_1 и n_2 от температуры не зависят. Однако для сплавов и полупроводников J_o существенно зависит от температуры.

1.2 Примеры решения и оформления задач

Пример 1. Электрический аппарат, рассчитанный на напряжение на клеммах $U_n = 12$ В, номинальной мощностью $W_n = 25$ Вт находится на расстоянии $l = 12$ м от источника тока с ЭДС $\mathcal{J} = 14$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,8$ Ом. Ток подается медным проводником, диаметр которого $d = 2,5$ мм. Определить действительную мощность аппарата, КПД цепи и скорость упорядоченного движения электронов u , среднюю длину свободного пробега электронов $\bar{\lambda}$ в проводнике. Во сколько раз скорость упорядоченного движения отличается от средней скорости теплового движения электронов \bar{v} ?

Дано:

$U_n = 12 \text{ В}$
 $W_n = 25 \text{ Вт}$
 $J = 14 \text{ В}$
 $l = 12 \text{ м}$
 $r = 0,8 \text{ Ом}$
 $d = 2,5 \text{ мм}$
 $\rho_c = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$
 $\rho = 8,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
 $\mu = 63,55 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
 $W; u; \lambda; \bar{v}; \eta$



В число известных величин включили удельное сопротивление меди ρ_c , ее плотность ρ , взятое из приложения данного пособия, а также молярную массу μ из таблицы Менделеева. Так как в условии задачи не указана температура среды, примем, что вся установка работает при температуре $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, т.е. $T = 293 \text{ К}$.

Определим сопротивление потребителя электрической энергии из формулы для мощности тока:

$$W_n = \frac{U_n^2}{R}. \text{ Отсюда } R = \frac{U_n^2}{W_n}.$$

Сопротивление проводников:

$$R_{\text{пр}} = \rho_c \frac{2l}{S} = \rho_c \frac{8l}{\pi d^2}.$$

Силу тока определяем по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{об}}} = \frac{\mathcal{E}}{r + \rho_c \frac{8l}{\pi d^2} + \frac{U_n^2}{W_n}}.$$

Действительная мощность аппарата:

$$W = I^2 R = \frac{I^2 U_n^2}{W_n}.$$

Плотность тока в проводнике связана со скоростью упорядоченного движения свободных электронов u

$$j = enu.$$

Будем считать, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Тогда концентрация свободных электронов n будет равняться концентрации атомов n_0 . Учитывая, что число атомов в одном моле равняется числу Авогадро, определяем

$$n = n_o = \frac{N_A}{V_\mu} = \frac{N_A \rho}{\mu}.$$

Таким образом,

$$j = \frac{e N_A \rho u}{\mu}.$$

С другой стороны, плотность тока можно через силу тока

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2}.$$

Приравняв правые части этих двух выражений, получаем соотношение для скорости дрейфа электронов в медном проводнике:

$$u = \frac{j}{en} = \frac{4\mu I}{\pi e d^2 N_A \rho}.$$

Чтобы определить среднюю длину свободного пробега электронов между узлами кристаллической решетки, воспользуемся формулой для удельной электропроводимости металлов, полученной в рамках классической электронной теории проводимости:

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{2m_e \bar{v}},$$

где m_e = масса электрона.

Отсюда

$$\bar{\lambda} = \frac{2m_e \bar{v}}{ne^2 \rho_c}.$$

Среднеарифметическая скорость теплового движения электронов определяем как для одноатомных молекул идеального газа:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_e}}.$$

КПД цепи η определяется как отношение действительной мощности аппарата к мощности источника тока:

$$\eta = \frac{W}{I \sqrt{S}}.$$

Анализ размерности:

$$[W] = \frac{[I]^2 [U]^2}{[W]} = \frac{\text{А}^2 \text{В}^2}{\text{Вт}} = \text{Вт}.$$

$$[\bar{v}] = \{ [k] [T] [m] \}^{1/2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$[u] = \frac{[j]}{[e][n]} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2} \cdot \frac{1}{\text{А} \cdot \text{с}} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$[\bar{\lambda}] = \frac{[m][v]}{[n] \cdot [\rho] \cdot [e]^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{м}^{-3} \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^2 \text{с}^2} = \text{м}.$$

Решение:

Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\sqrt{W}}{r + \rho_c \frac{8l}{\pi d^2} + \frac{U_n^2}{W_n}} = \frac{14}{0,8 + 1,7 \cdot 10^{-8} \frac{8 \cdot 12}{\pi \cdot 2,5^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{12^2}{25}} = 2,1 \text{ А}.$$

Действительная мощность аппарата:

$$W = \frac{I^2 U_n^2}{W_n} = \frac{2,1^2 \cdot 12^2}{25} = 25,4 \text{ Вт, т.е. больше номинальной мощности. В}$$

данном случае падение напряжения на проводнике всего 0,17 В.

Среднеарифметическая скорость теплового движения электронов:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_e}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,06 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Концентрация свободных электронов:

$$n = \frac{\rho}{\mu} N_A = \frac{8,8 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,55 \cdot 10^{-3}} = 8,43 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{м}^3}.$$

Скорость дрейфа электронов в медном проводнике:

$$u = \frac{4\mu I}{\pi e d^2 N_A \rho} = \frac{4 \cdot 63,55 \cdot 10^{-3} \cdot 2,1}{\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5^2 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 8,8 \cdot 10^3} = 3,21 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

Отношение среднеарифметической скорости теплового движения электронов к их скорости дрейфа:

$$\frac{\bar{v}}{u} = \frac{1,06 \cdot 10^5}{3,21 \cdot 10^{-5}} = 3,3 \cdot 10^9.$$

Средняя длина свободного пробега электронов:

$$\bar{\lambda} = \frac{2m_e \bar{v}}{ne^2 \rho_c} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,06 \cdot 10^5}{8,43 \cdot 10^{28} \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 0,17 \cdot 10^{-7}} = 5,26 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

КПД цепи:

$$\eta = \frac{W}{I^2 R} = \frac{25,4}{2,1^2 \cdot 14} = 0,864.$$

Ответ:

Действительная мощность аппарата: $W = 25,4 \text{ Вт}$.

Скорость дрейфа электронов: $u = 1,06 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Средняя длина свободного пробега электронов: $\bar{\lambda} = 5,26 \cdot 10^{-9}$ м.

Отношение среднеарифметической скорости теплового движения электронов к их скорости дрейфа:

$$\frac{\bar{v}}{u} = \frac{1,06 \cdot 10^5}{3,21 \cdot 10^{-5}} = 3,3 \cdot 10^9.$$

КПД цепи: $\eta = 0,864$. Большая часть потери мощности происходит на внутреннем сопротивлении источника.

Пример 2. К клеммам аккумуляторной батареи с ЭДС $J = 13$ В параллельно подсоединили две лампочки, рассчитанные на номинальное напряжение $U_n = 12$ В. Номинальная мощность первой лампочки $W_{н1} = 21$ Вт, а второй – $W_{н2} = 40$ Вт. Лампочки находятся на расстоянии $L = 5$ м от источника тока. Внутреннее сопротивление источника тока $r = 0,1$ Ом. Медный провод какого диаметра необходимо взять, чтобы его сопротивление не превышало $R_{пр} = 0,2$ Ом? Как изменяется потенциал вдоль замкнутой цепи? Определить силы токов в лампочках и их действительные мощности.

Дано:

$J = 13$ В
$U_n = 12$ В
$W_{н1} = 21$ Вт
$W_{н2} = 40$ Вт
$L = 5$ м
$r = 0,1$ Ом
$R_{пр} = 0,2$ Ом
$d; I_1; I_2; W_1; W_2$

Анализ:

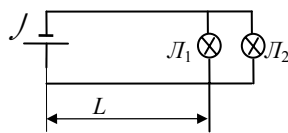


Рис. 1

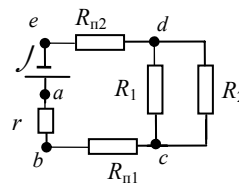


Рис. 2

Электрическая схема задачи показана на рис.1. Определим сначала диаметр соединительного провода. Сопротивление металлического проводника можно рассчитать по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{8L}{\pi d^2}.$$

При этом мы учли, что общая длина проводника $l = 2L$. Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{8\rho L}{\pi R}}.$$

Формула для сопротивления является общеизвестной, поэтому из проверки размерности можно утверждать, что если все величины

подставить в единицах системы СИ, то единица измерения диаметра получится в метрах.

Промышленность выпускает провода определенных диаметров. Поэтому сначала определим диаметр проводника. Для этого возьмем удельное сопротивление меди из справочника, приведенного в приложении, для температуры $t = 20^\circ\text{C}$: $\rho = 0,17 \cdot 10^{-7}$ Ом·м. Тогда

$$d = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,17 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0,2}} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Из имеющихся значений подбираем наиболее близкое большее значение, а именно $d = 1,2$ мм. Тогда действительное общее сопротивление соединительных проводов

$$R = \rho \frac{8L}{\pi d^2} = \frac{0,17 \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 5}{\pi \cdot 1,2^2 \cdot 10^{-6}} = 0,15 \text{ Ом.}$$

Так как необходимо проанализировать изменение потенциала вдоль цепи общее сопротивление представим состоящей из двух резисторов с сопротивлениями $R_{n1} = R_{n2} = R/2 = 0,075$ Ом. Определим сопротивления лампочек из закона Джоуля–Ленца для мощности электрического тока:

$$R_1 = \frac{U^2}{W_{n1}}, \quad R_2 = \frac{U^2}{W_{n2}}.$$

Лампочки и внутреннее сопротивление источника тока r представим как отдельные резисторы, составим эквивалентную схему данной задачи (рис.2), соединительные провода которой не имеют сопротивления.

Сначала определим силу общего тока по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_0},$$

где R_0 – общее сопротивление внешней цепи, включающее сопротивление соединительного провода и сопротивления лампочек. Общее сопротивление параллельно соединенных двух лампочек

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Общее электрическое сопротивление цепи

$$R_{\text{ц}} = r + R_{n1} + R_n + R_{n2}.$$

С учетом данного соотношения закон Ома можно записать в виде

$$\mathcal{J} = Ir + I R_{n1} + I R_n + I R_{n2}.$$

Потенциал отрицательной клеммы источника примем равным нулю: $\varphi_e = 0$. При перемещении положительного пробного заряда при отсутствии внешней цепи его потенциал увеличивается на величину ЭДС источника тока, т.е. $\varphi_a = J$ (при разомкнутой внешней цепи напряжение на клеммах источника равняется ЭДС). Если по цепи течет ток, то на внутреннем сопротивлении происходит уменьшение потенциала (падение напряжения) на величину $\varphi_a - \varphi_b = Ir$. Отсюда действительный потенциал положительной клеммы (разность потенциалов между клеммами источника $\varphi_b - \varphi_e$ при включенной внешней цепи)

$$\varphi_b = J - Ir.$$

На участке bc происходит уменьшение потенциала на сопротивлении проводника на величину $U_{bc} = IR_{п1}$, поэтому

$$\varphi_c = \varphi_b - IR_{п1}.$$

На участке cd падение напряжения на лампочках составляет $U_{cd} = IR_l$. Таким образом, потенциал точки d

$$\varphi_d = \varphi_c - IR_l.$$

На второй половине провода происходит дальнейшее падение напряжения на величину $U_{de} = IR_{п2}$. В результате потенциал уменьшается до значения потенциала отрицательной клеммы источника тока, т.е. до нуля.

Силы токов через отдельные лампочки можно определить через разность потенциалов U_{cd} :

$$I_1 = \frac{IR_l}{R_1}, \quad I_2 = \frac{IR_l}{R_2}.$$

Действительные мощности лампочек

$$W_1 = I_1^2 R_1, \quad W_2 = I_2^2 R_2.$$

Анализ размерности:

В данной задаче искомые величины определяются по стандартным формулам. Поэтому если в эти формулы подставить исходные данные в единицах системы СИ, то единицы искомых величин получатся также в системе СИ.

Решение:

$$R_1 = \frac{U_n^2}{W_{н1}} = \frac{12^2}{21} = 6,86 \text{ Ом.}$$

$$R_1 = \frac{U_n^2}{W_{n2}} = \frac{12^2}{40} = 3,6 \text{ Ом.}$$

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6,86 \cdot 3,6}{6,86 + 3,6} = 2,36 \text{ Ом.}$$

Общее электрическое сопротивление цепи

$$R_y = r + R_{n1} + R_n + R_{n2} = 0,1 + 0,075 + 2,36 + 0,075 = 2,61 \text{ Ом.}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_y} = \frac{13}{2,61} = 4,98 \text{ А.}$$

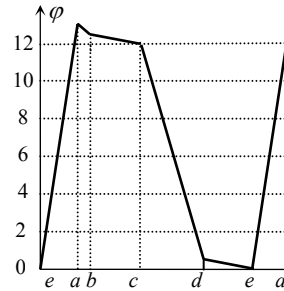
$$\varphi_b = J - Ir = 13 - 4,98 \cdot 0,1 = 12,5 \text{ В.}$$

$$\varphi_c = \varphi_b - I R_{n1} = 12,5 - 4,98 \cdot 0,075 = 12,13 \text{ В.}$$

$$\varphi_d = \varphi_c - I R_n = 12,13 - 4,98 \cdot 2,36 = 0,376 \text{ В.}$$

$$U_{de} = I R_{n2} = 4,98 \cdot 0,075 = 0,374 \text{ В.}$$

Последние два значения должны были совпасть, однако за счет ошибок округления в промежуточных вычислениях между ними возникла определенная разница. Поэтому, если вычисления производятся последовательно, в промежуточных результатах необходимо сохранять большее количество значащих цифр. Ошибки округления можно уменьшить, если все искомые величины непосредственно вычислить через исходные данные. Результаты вычисления потенциалов разных точек цепи представлены в виде графика.



$$I_1 = IR_n / R_1 = 4,98 \cdot 2,36 / 6,86 = 1,713 \text{ А.}$$

$$I_2 = IR_n / R_2 = 4,98 \cdot 2,36 / 3,6 = 3,267 \text{ А.}$$

Сумма этих токов должна равняться току в цепи $I_1 + I_2 = 1,713 + 3,267 = 4,98 \text{ А}$. Как видим, это условие выполняется.

$$W_1 = I_1^2 R_1 = 1,713^2 \cdot 6,86 = 20,13 \text{ Вт.}$$

$$W_2 = I_2^2 R_2 = 3,267^2 \cdot 3,6 = 38,4 \text{ Вт.}$$

Ответ:

Диаметр соединительных проводов, который обеспечивает сопротивление, не превышающее требуемое $d = 1,2 \text{ мм}$.

Сила тока через первую лампочку $I_1 = 1,713 \text{ А}$.

Сила тока через вторую лампочку $I_2 = 3,267 \text{ А}$.

Мощность первой лампы $W_1 = 20,13 \text{ Вт}$.

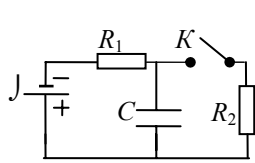
Мощность второй лампы $W_2 = 38,4 \text{ Вт}$.

Видно, что, если даже ЭДС источника тока $J = 13 \text{ В}$ выше номинального значения напряжений ламп, за счет потери мощности на проводах и внутри самого источника действительные мощности ламп оказались меньше номинальных.

Пример 3. В цепь постоянного тока подключен конденсатор электроемкостью $C = 1 \text{ мкФ}$, как показано на схеме. Значения сопротивлений резисторов $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 20 \text{ кОм}$. ЭДС батареи $J = 12 \text{ В}$. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника тока определить максимальный заряд, приобретаемый конденсатором; время, через которое заряд достигает 86% максимального ($q = 0,86q_m$). Сначала ключ K разомкнут, и замыкается он после зарядки конденсатора. Определить заряд конденсатора q_2 после замыкания ключа.

Дано:
 $C = 1 \text{ мкФ}$
 $R_1 = 10 \text{ кОм}$
 $R_2 = 20 \text{ кОм}$
 $J = 12 \text{ В}$

 q_m, t_{86}, q_2



Анализ:
 Диэлектрик между обкладками конденсатора не пропускает электрический ток. Однако после подсоединения источника ток в цепи все же течет, если даже ключ K разомкнут.

Электроны движутся от отрицательной клеммы источника через резистор R_1 и накапливаются в верхней обкладке конденсатора. С нижней обкладки электроны движутся к положительной клемме источника, и обкладка заряжается положительно. Зарядка конденсатора продолжается до тех пор пока разность потенциалов между обкладками не станет равным ЭДС источника: $U_m = J$. Убывающий ток в цепи после этого прекратится. Конденсатор приобретает максимальный заряд:

$$q_m = C U_m = C J.$$

Второе правило Кирхгофа для левого контура цепи при отключенном ключе запишется в виде

$$J = IR_1 + q/C,$$

т.е. ЭДС источника равняется сумме падений напряжений на резисторе (IR_1) и конденсаторе (q/C). В данном выражении сила тока I и заряд конденсатора q являются переменными.

Сила тока в цепи равняется скорости накопления заряда:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

С учетом этого выражения закон Ома для контура приобретает вид

$$J = R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}.$$

Произведем разделение переменных:

$$\frac{dq}{q - C \mathfrak{E}} = -\frac{dt}{R_1 C}.$$

Если проинтегрировать данное уравнение, получится

$$\ln(q - C \mathfrak{E}) = -\frac{t}{R_1 C} + K.$$

Здесь значение постоянной интегрирования K можно определить с учетом условия $q = 0$ при $t = 0$: $K = \ln(-q_m)$. После подстановки данного выражения для K имеем

$$\ln\left(1 - \frac{q}{C \mathfrak{E}}\right) = -\frac{t}{R_1 C}.$$

После экспонирования данного выражения

$$q = q_m [1 - \exp(-t/(R_1 C))].$$

Полученное выражение показывает, что заряд на обкладках конденсатора возрастает по экспоненциальной зависимости. Величина $R_1 C$ называется *постоянной времени* цепи и определяет промежуток времени, за который заряд достигает $(1 - e^{-1})$ части от своего максимального значения.

Для получения времени зарядки t_{86} до 86% от максимального значения исходные данные подставим в полученное выражение

$$0,86q_m = q_m [1 - \exp(-t_{86}/(R_1 C))].$$

Отсюда

$$t_{86} = R_1 C \cdot \ln \frac{1}{1-0,86} = 1,966 R_1 C.$$

После замыкания ключа K через короткий промежуток времени по цепи потечет постоянный ток, силу которого можно определить по Закону Ома:

$$I = \frac{\mathfrak{E}}{R_1 + R_2}.$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора будет равняться падению напряжения на втором резисторе:

$$U_c = IR_2 = \frac{\mathfrak{E} R_2}{R_1 + R_2}.$$

Следовательно, заряд конденсатора, когда по цепи течет постоянный ток:

$$q_2 = CU_c = \frac{\mathfrak{E} R_2 C}{R_1 + R_2}.$$

Анализ размерности:

$$[q_m] = [C] \cdot [J] = \Phi \cdot B = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot \text{В} = \text{Кл}.$$

$$[t_{86}] = [R] \cdot [C] = \text{Ом} \cdot \Phi = \frac{\text{В}}{\text{Кл/с}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{с}.$$

$$[q_2] = [J] \cdot [R] \cdot [C] / [R] = [J] \cdot [C] = \Phi \cdot B = \text{Кл}.$$

Решение:

$$q_m = C J = 10^{-6} \cdot 12 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

$$t_{86} = 1,966 R_1 C = 1,966 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} = 1,966 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

$$q_2 = \frac{R_2 C}{R_1 + R_2} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}}{10^4 + 2 \cdot 10^4} = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Ответ:

Максимальный заряд конденсатора после зарядки $q_m = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Кл.

Время, за которое конденсатор заряжается на 86% от своего максимального значения $t_{86} = 1,966 \cdot 10^{-2}$ с. Как видим, за достаточно короткий промежуток времени конденсатор накапливает основной заряд. Заряд, накопленный конденсатором при постоянном токе в цепи: $q_2 = 0,8 \cdot 10^{-5}$ Кл. В этом случае заряд конденсатора составляет 66,7% от своего максимального значения.

Пример 4. Необходимо измерить падение напряжения на резисторе $R = 10$ Ом и силу тока через него. ЭДС источника тока $J = 24$ В, а его внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом. В наличии имеются: 1) вольтметр, рассчитанный на максимальное напряжение $U_N = 3$ В, номинальный ток через который при этом $I_{HV} = 10$ мА; 2) миллиамперметр с пределом измерения $I_N = 10$ мА с внутренним сопротивлением $R_A = 1$ Ом. Определить дополнительное сопротивление для вольтметра и сопротивление шунта для амперметра. Сколько делений покажут стрелки этих приборов в этом случае, если шкала каждого прибора имеет по 100 делений? Как изменятся падение напряжения и ток?

Дано:

$$R = 10 \text{ Ом}$$

$$J = 24 \text{ В}$$

$$r = 0,5 \text{ Ом}$$

$$U_N = 3 \text{ В}$$

$$I_{HV} = 10 \text{ мА}$$

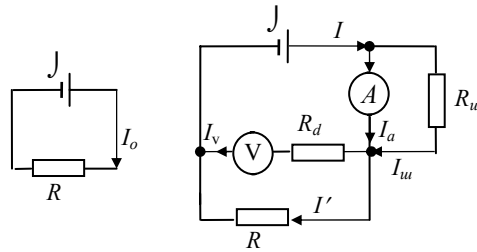
$$I_N = 10 \text{ мА}$$

$$R_A = 1 \text{ Ом}$$

$$N_a = N_v = 100$$

$$R_d; R_{ш}; X_v; X_A; U'; I'$$

Анализ:



В данном примере, чтобы подобрать значения добавочного сопротивления для вольтметра и для шунта, необходимо оценить измеряемые величины. Поэтому, в отличие от других примеров, отдельные вычисления будем проводить в разделе «анализ».

Определим падение напряжения на резисторе при отсутствии других приборов в цепи:

$$U = I_o R = \frac{\mathcal{E}R}{R+r} = \frac{24 \cdot 10}{10+0,5} = 22,86 \text{ В.}$$

Учитывая, что падение напряжения на резисторе примерно такое же, что и ЭДС источника, дополнительное сопротивление для вольтметра, которое подключается последовательно, рассчитаем исходя из возможности измерения общего напряжения $U_o = J = 24 \text{ В}$. При номинальном токе через вольтметр дополнительное сопротивление

$$R_d = (U_o - U_N)/I_{HV} = (24 - 3)/0,01 = 2100 \text{ Ом.}$$

При отсутствии других приборов ток через резистор

$$I_o = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{24}{10+0,5} = 2,286 \text{ А.}$$

Сопротивление шунта рассчитаем из возможности измерения силы тока $I_m = 2,5 \text{ А}$. Чтобы можно было измерить токи, которые больше предела измерения амперметра, параллельно ему следует включить шунт. При предельном токе через амперметр сила тока через шунт

$$I_{ш} = I_m - I_N = 2,5 - 0,01 = 2,49 \text{ А.}$$

При параллельном соединении падение напряжения на амперметре и на шунте будут одинаковыми:

$$U_{ш} = U_A = I_N R_A.$$

Исходя из этого, сопротивление шунта может быть рассчитано по формуле

$$R_{ш} = I_N R_A / I_{ш} = 0,01 \cdot 1 / 2,49 = 0,004 \text{ Ом.}$$

Чтобы определить показания приборов, необходимо вычислить действительные токи, проходящие через них. Суммарная сила тока в схеме с подключенными приборами

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_в + r},$$

где $R_в$ – внешнее сопротивление цепи со всеми приборами.

Используя исходные данные, можно определить внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R_v = U_N / I_{нв}.$$

Суммарное сопротивление вольтметра и добавочного сопротивления $R_{vd} = R_v + R_d$. Это сопротивление подключено параллельно с резистором, поэтому их общее сопротивление

$$R_{vR} = \frac{R_{vd} \cdot R}{R_{vd} + R}.$$

Общее сопротивление амперметра и шунта

$$R_{аш} = \frac{R_A \cdot R_{ш}}{R_A + R_{ш}}.$$

Внешнее сопротивление цепи $R_в = R_{vR} + R_{аш}$. Действительный ток через амперметр

$$I_a = IR_{аш} / R_A.$$

Поэтому количество делений, на сколько отклоняется стрелка амперметра:

$$X_A = \frac{I_a \cdot N_a}{I_N}.$$

Действительное напряжение на резисторе

$$U' = IR_{vR}.$$

Сила тока через резистор

$$I' = U' / R.$$

Сила тока через вольтметр

$$I_v = U' / R_{vd}.$$

Количество делений, на сколько отклоняется стрелка вольтметра:

$$X_v = \frac{I_v \cdot N_v}{I_{нв}}.$$

Анализ размерности:

$$[X_A] = [I_a]/[I_m] = A/A = 1 \text{ (безразмерная величина).}$$

$$[X_v] = 1 \text{ (аналогично с первым случаем).}$$

$$[U'] = [I] \cdot [R] = A \frac{B}{A} = B.$$

$$[I'] = [U'] / [R] = B \frac{A}{B} = A.$$

Решение:

Сопротивление вольтметра $R_v = U_N / I_{нв} = 3 / 0,01 = 300 \text{ Ом.}$

Суммарное сопротивление вольтметра и добавочного сопротивления $R_{vd} = R_v + R_d = 300 + 2100 = 2400 \text{ Ом.}$

$$R_{vR} = \frac{R_{vd} \cdot R}{R_{vd} + R} = \frac{2400 \cdot 10}{2400 + 10} = 9,9585 \text{ Ом.}$$

$$R_{au} = \frac{R_A \cdot R_{iu}}{R_A + R_{iu}} = \frac{1 \cdot 0,004}{1 + 0,004} = 0,003984 \text{ Ом.}$$

Внешнее сопротивление цепи

$$R_6 = R_{vR} + R_{au} = 9,9585 + 0,003984 = 9,9625 \text{ Ом.}$$

$$I = \frac{\overset{\boxtimes}{E}}{R_6 + r} = \frac{24}{9,9625 + 0,5} = 2,294 \text{ А.}$$

Действительный ток через амперметр

$$I_a = IR_{au}/R_A = 2,294 \cdot 0,003984 / 1 = 0,00914 \text{ А.}$$

Показания амперметра

$$X_A = \frac{I_a \cdot N_a}{I_N} = \frac{0,00914 \cdot 100}{0,01} = 91,4 \text{ делений.}$$

Действительное напряжение на резисторе

$$U' = IR_{vR} = 2,294 \cdot 9,9585 = 22,845 \text{ В.}$$

Сила тока через резистор $I' = U'/R = 22,845/10 = 2,285 \text{ А.}$

Сила тока через вольтметр $I_v = U'/R_{vd} = 22,845/2400 = 0,00952 \text{ А.}$

Показания вольтметра

$$X_v = \frac{I_v \cdot N_v}{I_{нв}} = \frac{0,00952 \cdot 100}{0,01} = 95,2 \text{ деления.}$$

Ответ:

Чтобы измерить напряжение в 24 В с помощью вольтметра, рассчитанного на максимальное напряжение 3 В, последовательно с вольтметром необходимо включить добавочное сопротивление $R_d = 2100$ Ом. При этом стрелка вольтметра, подключенного в рассмотренную цепь, вместе с другими приборами отклоняется на $X_v = 95,2$ деления. Это соответствует напряжению на нагрузочном резисторе $U' = 22,845$ В. При отсутствии всех приборов в схеме падение напряжения на резисторе было $U = 22,86$ В. Таким образом, подключение приборов привело к изменению значения напряжения на 0,066%.

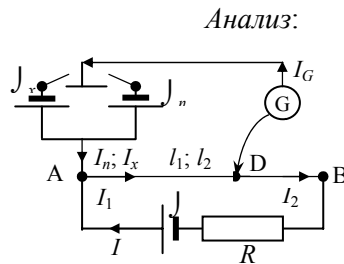
Для измерения силы тока 2,5 А с помощью амперметра, с пределом измерений $I_N = 10$ мА параллельно к амперметру включили шунт с сопротивлением $R_{ш} = 0,004$ Ом. При таком подключении его стрелка отклонилась на $X_A = 91,4$ деления, что соответствовало силе тока в цепи $I = 2,294$ А и силе тока через резистор $I' = 2,285$ А. Когда приборы не были включены в схему, ток через резистор составлял $I_o = 2,286$ А.

Таким образом, сами измерительные приборы и добавочные сопротивления приводят к изменению параметров цепи. Однако если использовать вольтметр с большим внутренним сопротивлением и амперметр с маленьким сопротивлением, эти изменения небольшие.

Пример 5. Для определения ЭДС источников применяют метод компенсации. При включенном известном источнике с ЭДС $J_n = 1,2$ В положение движка реохорда, при котором ток через гальванометр равен нулю: $l_1 = 20$ см. При неизвестном источнике J_x положение

движка $l_2 = 60$ см. Чему равняется ЭДС неизвестного источника?

Дано:
 $J_n = 1,2$ В
 $l_1 = 20$ см
 $l_2 = 60$ см
 J_x



Напишем уравнение по второму правилу Кирхгофа для верхнего замкнутого контура цепи

при включенном известном источнике:

$$I_1 R_1 + I_G (R_G + r_n) = J_n,$$

где R_1 сопротивление плеча реохорда длиной l_1 . Так как по условию задачи ток через гальванометр не течет, то

$$I_1 R_1 = J_n. \quad (1)$$

При включенном неизвестном источнике это уравнение приобретает вид

$$I_1' R_1' = J_x. \quad (2)$$

Из первого правила Кирхгофа для узла D

$$I_1 + I_G - I_2 = 0.$$

Однако $I_G = 0$. Поэтому для уравновешенной схемы $I_1 = I_2$. Из первого правила Кирхгофа для узла A с учетом $I_G = 0$, вытекает $I_1 = I$. Отсюда $I_1 = I_1'$. Поэтому если уравнение (1) разделить на уравнение (2), получим

$$\frac{R_1}{R_1'} = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_x}.$$

Для проволочного реохорда отношение сопротивлений плеча реохорда можно заменить отношением длин провода реохорда:

$$\frac{R_1}{R_1'} = \frac{l_1}{l_2}.$$

В итоге значение ЭДС неизвестного источника можно определить по формуле

$$J_x = J_n \frac{l_2}{l_1}.$$

Анализ размерности:

$$[J_x] = [J_n] \frac{[l_2]}{[l_1]} = \text{В} \frac{\text{М}}{\text{М}} = \text{В}.$$

Решение:

$$J_x = J_n \frac{l_2}{l_1} = 1,2 \frac{0,6}{0,2} = 3,6 \text{ В}.$$

Ответ:

Значение ЭДС неизвестного источника – $J_x = 3,6 \text{ В}$.

Пример 6. При равномерном возрастании силы тока через раствор медного купороса от $I_0 = 0$ до $I = I_1$ за время $t_1 = 20 \text{ с}$ на катоде выделяется медь массой $m = 13,176 \text{ мг}$. Определить конечную силу тока I_1 . Чему равняется средняя удельная электропроводимость электролита, если площадь катода $S = 50 \text{ см}^2$, расстояние между электродами $l = 2 \text{ см}$, а напряжение между ними в конце процесса $U_1 = 6 \text{ В}$? Считая, что массовая концентрация раствора $c = 10 \text{ кг/м}^3$ и коэффициент диссоциации молекул медного купороса $\alpha = 1$, опреде-

лить суммарную подвижность положительных и отрицательных ионов.

Дано:

$$\begin{array}{l} I_0 = 0 \\ t_1 = 20 \text{ с} \\ m = 13,2 \text{ мг} \\ S = 50 \text{ см}^2 \\ l = 2 \text{ см} \\ U_1 = 6 \text{ В} \\ c = 10 \text{ кг/м}^3 \\ \alpha = 1 \end{array}$$

$$I_1; \gamma; u$$

Анализ:

По первому закону Фарадея для электролиза масса выделившегося вещества на катоде пропорциональна количеству заряда, протекшего через раствор медного купороса:

$$m = k q,$$

где k – электрохимический эквивалент, значение которого для двухвалентной меди можно найти в приложении, ($k = 0,3294 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл).

По условию задачи сила тока равномерно возрастает со временем, т.е. имеется линейная зависимость $I = \kappa t$, где κ – коэффициент пропорциональности. Общее количество прошедшего через электролит заряда можно найти путем интегрирования:

$$q = \int_0^{t_1} I dt = \kappa \int_0^{t_1} t dt = \frac{\kappa t_1^2}{2}.$$

Из условия задачи $\kappa = I_1/t_1$, поэтому

$$q = \frac{I_1 t_1}{2}.$$

Подставим данное выражение в закон Фарадея

$$m = k \frac{I_1 t_1}{2}.$$

Отсюда искомое значение силы тока

$$I_1 = \frac{2m}{\kappa t_1}.$$

В электролитах выполняется закон Ома для плотности тока:

$$j = \gamma E,$$

где $j = I_1/S$; $E = U_1/l$ – напряженность поля.

Отсюда средняя удельная проводимость раствора

$$\gamma = \frac{I_1 l}{U_1 S}.$$

Удельную электропроводимость электролита можно выразить через формулу

$$\gamma = eZ\alpha n_o(u_+ + u_-) = eZ\alpha n_o u.$$

Искомую суммарную подвижность ионов обозначили как

$$u = (u_+ + u_-) = \gamma / (eZ\alpha n_o),$$

где $Z = 2$ – валентность меди; e – элементарный заряд.

Концентрация положительных ионов меди в растворе CuSO_4

$$n_o = \frac{c}{\mu} N_A,$$

где $\mu = 0,1275$ кг/моль – молярная масса медного купороса; N_A – число Авогадро.

Окончательно получаем

$$u = \frac{\gamma\mu}{eZ\alpha c N_A}.$$

Анализ размерности:

$$[I_1] = \frac{[m]}{[k][t]} = \frac{\text{кг}}{\text{кг/Кл} \cdot \text{с}} = \text{А}. \quad [\gamma] = \frac{[I] \cdot [I]}{[U][S]} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{В} \cdot \text{м}^2} = (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}.$$

$$[u] = \frac{[\gamma][\mu]}{[e][c][N_A]} = \frac{\text{Кл}/(\text{с} \cdot \text{В} \cdot \text{м}) \cdot \text{кг/моль}}{\text{Кл} \cdot \text{кг/м}^3 (1/\text{моль})} = \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Решение:

$$I_1 = \frac{2m}{kt_1} = \frac{2 \cdot 13,176 \cdot 10^{-6}}{0,3294 \cdot 10^{-6} \cdot 20} = 4 \text{ А}.$$

$$\gamma = \frac{I_1 l}{U_1 S} = \frac{40,02}{6,50 \cdot 10^{-4}} = 2,67 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}.$$

$$u = \frac{\gamma\mu}{eZ\alpha c N_A} = \frac{2,67 \cdot 0,1275}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 0,02 \cdot 10^{23}} = 1,77 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Ответ:

Максимальный ток в электролитической ванне $I_1 = 4$ А.

Удельная электропроводимость электролита $\gamma = 2,67 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$.

Суммарная подвижность ионов в растворе $u = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

1.3 Задания для расчетно-графической работы РГР 21

Задачи 211. Нечетные варианты

Две последовательно соединенные лампы с номинальными значениями напряжения U_{ni} и мощностью W_{ni} расположены на расстоянии l от источника постоянного тока с ЭДС J и внутренним сопротивлением r . Лампы соединены с источником тока проводником из металла Me диаметром d . Определить мощность каждой лампы, потерю мощности на проводниках, скорость направленного движения электронов в проводнике, длину их свободного пробега. (Считать, что на один атом меди приходится 0,8 свободных электронов; алюминия – 2; железа – 1,5).

№ вар.	J , В	r , Ом	U_{n1} , В	W_{n1} , Вт	U_{n2} , В	W_{n2} , Вт	Me	l , м	d , мм
1	12	0,3	12	5	6,3	3	Cu	2	1,5
3	60	0,5	36	15	36	40	Al	3	2,3
5	9	0,5	3,5	1,5	6	1,2	Fe	5	2,5
7	12	0,7	6,3	7	3,5	2	Cu	7	0,75
9	90	0,9	30	15	110	40	Al	90	2,9
11	110	1,1	60	60	75	75	Fe	11	2,1
13	36	1,3	24	25	36	15	Cu	13	1,3
15	220	1,5	110	100	110	60	Al	15	1,5
17	4,5	0,3	2,5	0,6	2,5	0,8	Fe	17	3,7
19	60	1,6	36	40	24	40	Cu	19	2,9
21	6	0,3	4,5	1,5	3,5	1,5	Al	21	2,1
23	110	1,3	110	60	110	40	Fe	23	2,3
25	25	0,5	24	15	36	15	Cu	25	2,5
27	12	0,6	12	13	12	26	Al	27	2,7
29	24	0,7	9	6	15	7	Fe	29	2,9
31	36	1,1	24	11	12	6	Cu	31	3
33	24	0,8	9	6	14	8	Al	33	3,3
35	12	0,6	6	5	7	3	Fe	35	3,5

Задачи 211. Четные варианты

Электрическая плитка мощностью W_n и спиралью из нихрома предназначена для включения в сеть с напряжением U_n . Сколько метров проволоки диаметром d_1 надо взять для изготовления спирали, если температура нити равна t ? Плитка подключается к источнику тока, находящемуся на расстоянии l с помощью двухпроводной линии

из металла Me с диаметром проводки d_2 . Определить, потерю мощности на проводниках, необходимое напряжение источника для обеспечения номинального напряжения плитки, скорость направленного движения (дрейфа) электронов в проводнике, длину их свободного пробега. Определить также плотности тока в подводящем проводнике, в спирали плитки и напряженности электрического поля в этих проводниках. (Считать, что на один атом меди приходится 0,8 свободных электронов; алюминия – 2; железа – 1,5).

№ вар.	W_n , кВт	U_n , В	d_1 , мм	t , °C	Me	l , м	d_2 , мм
2	2	220	0,4	920	Cu	2	2,2
4	1	110	0,3	900	Al	3	2,3
6	0,5	36	0,25	860	Fe	6	2,6
8	0,8	220	0,5	880	Cu	8	2,8
10	1,5	380	0,6	930	Al	90	5
12	0,6	24	0,25	890	Fe	1,2	2,2
14	0,7	220	0,4	920	Cu	1,4	2,4
16	0,6	110	0,36	900	Al	1,6	1,6
18	0,8	36	0,48	860	Fe	1,8	1,8
20	2	220	0,42	880	Cu	1,9	1,9
22	1,2	380	0,5	930	Al	2,2	2,2
24	1,4	24	0,24	890	Fe	2,4	2,4
26	1,6	220	0,46	920	Cu	2,6	2,6
28	0,8	110	0,48	900	Al	2,8	2,8
30	0,3	36	0,3	860	Fe	3	3
32	1	220	0,52	895	Cu	3,2	3,2
34	3,4	380	0,44	930	Al	3,4	3,4
36	0,4	24	0,36	890	Fe	3,6	3,6

Задачи 212. Варианты: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

Стрелка миллиамперметра отклоняется до конца шкалы прибора, если через него идет ток I . Внутреннее сопротивление миллиамперметра R и количество делений N . Проводник какой длины надо взять в качестве дополнительного сопротивления, чтобы прибор можно было использовать в качестве вольтметра на напряжение U ? Проводник имеет диаметр d и сделан из сплава Sn . Рассчитайте цену деления миллиамперметра и получившегося вольтметра.

№ вар.	I_1 , мА	R , Ом	U , В	N	Сплав	d , мм
1	10	2	250	100	нихром	0,05
6	60	4	150	60	константан	0,04
11	150	6	60	150	вольфрам	0,1
16	75	3	100	75	нейзильбер	0,08
21	15	2	75	150	нихром	0,06
26	30	5	30	150	нейзильбер	0,06
31	200	4	220	100	нихром	0,1

Задачи 212. Варианты: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32

Амперметр со шкалой, содержащей N делений, сопротивление которого R , рассчитан на измерение силы тока I_1 . Как из этого амперметра сделать прибор, годный для измерения силы тока до I_2 ? Если для этого использовать проводник из металла Me диаметром d , то какой длины проводник для этого понадобится? Рассчитайте цену деления амперметра в первом и во втором случаях.

№ вар.	I_1 , мА	R , Ом	I_2 , А	N	Me	d , мм
2	250	2,5	5	100	Al	0,1
7	60	3	3	60	Cu	0,07
12	150	4	2	150	Fe	0,12
17	75	3	1,5	75		0,075
22	15	2	4	150	Al	0,12
27	30	5	10	150	Cu	0,2
32	50	2,5	2,5	250	Ag	0,05

Задачи 212. Варианты: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

Вольтметр рассчитан на измерение максимального напряжения U_1 и имеет N делений. При этом через вольтметр идет ток I . Проводник какой длины надо взять и как подключить к вольтметру, чтобы с помощью вольтметра можно было измерять напряжение U . Рассчитайте цену деления вольтметра в первом и во втором случаях. Проводник сделан из сплава Sn и имеет диаметр d .

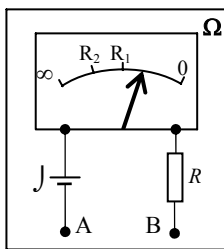
№ вар.	I , мА	U_1 , В	U , В	N	Сплав	d , мм
3	20	30	250	100	нихром	0,03
8	15	15	150	60	константан	0,02
13	150	10	60	150	вольфрам	0,1
18	75	6	100	75	нейзильбер	0,04
23	15	2	75	150	нихром	0,06
28	30	3	30	150	манганин	0,05
33	50	5	220	100	нихром	0,1

Задачи 212. Варианты: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34

Амперметр, накоротко присоединенный к гальваническому элементу с ЭДС J и внутренним сопротивлением r , показывает ток I . Какой ток покажет амперметр, если его зашунтировать проводником из металла Me диаметром d и длиной l ? Как при этом измениться цена деления прибора, если количество делений N ?

№ вар.	J , В	r , Ом	I , А	N	Me	d , мм	l , см
4	1,5	0,2	5	150	Cu	0,1	10
9	9	0,5	15	100	Al	0,08	15
14	14	0,4	14	150	Ag	0,14	14
19	24	1,2	12	60	Ni	0,2	19
24	24	2	6	60	Mg	0,24	24
29	6	0,3	10	100	Cu	0,2	29
34	12	0,4	15	150	Al	0,34	34

Задачи 212. Варианты: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35



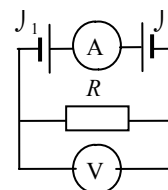
Прибор для измерения сопротивления называется *омметром*. В его схеме используется батарея с ЭДС J и резистор с сопротивлением R . Шкала прибора, как показано на рисунке, отградуирована от бесконечности до нуля. Если клеммы A и B омметра замкнуть накоротко, то максимальная сила тока через прибор составляет I_N и отклонение прибора на всю шкалу соответствует сопротивлению, равному нулю. Какому сопротивлению соответствует отклонение стрелки прибора на половину шкалы, на $1/4$ часть шкалы?

№ вар.	5	10	15	20	25	30	35
J , В	5	6	12	9	5	3	4,5
R , Ом	80	100	200	150	100	50	45
I , мА	50	60	120	90	50	30	45

Задачи 213. Варианты: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33

При электрических измерениях часто вольтметр и амперметр считают идеальными, т.е. сопротивление вольтметра – бесконечно боль-

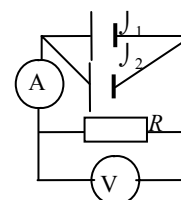
шим, а амперметра – равным нулю. Пусть амперметр и вольтметр подключены в цепь как показано на рисунке. ЭДС источников J_1 и J_2 , их внутренние сопротивления r_1 и r_2 соответственно. Внешнее сопротивление R , сопротивления вольтметра и амперметра R_V и R_A . Определить показания амперметра и вольтметра. Найти относительную погрешность определения сопротивления R по показаниям амперметра и вольтметра, если их считать идеальными. Построить график изменения потенциала вдоль цепи.



№ вар	J_1 , В	J_2 , В	r_1 , Ом	r_2 , Ом	R , Ом	R_V , Ом	R_A , Ом
1	6	3	0,3	0,1	10	100	0,4
5	3	7	0,4	0,7	5	105	0,5
9	9	3	0,6	0,3	9	110	0,3
13	6	13	0,4	0,9	13	115	0,5
17	13	7	0,7	0,4	17	120	0,6
21	24	6	1	0,3	21	120	0,5
25	12	25	0,4	1	25	125	0,6
29	30	15	0,9	0,7	20	130	0,5
33	36	12	1,3	0,9	33	135	0,6

Задачи 213. Варианты: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34

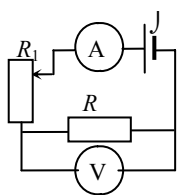
Два источника тока с одинаковыми ЭДС $J = J_1 = J_2$ и с внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 соответственно подключены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление R . Сопротивления вольтметра и амперметра R_V и R_A . Определить показания приборов и силы токов через каждый элемент по отдельности. Построить график изменения потенциала вдоль цепи.



№ вар	J , В	r_1 , Ом	r_2 , Ом	R , Ом	R_V , Ом	R_A , Ом
2	6	0,2	0,1	2	100	0,2
6	9	0,4	0,7	6	105	0,5
10	10	0,6	0,3	10	110	0,3
14	14	1,4	0,9	14	115	0,5
18	18	0,8	0,4	18	120	0,6
22	22	1	0,3	22	120	0,5
26	26	0,6	1	26	125	0,6
30	30	0,9	0,7	30	130	0,5

34	34	1,2	0,9	34	135	0,6
----	----	-----	-----	----	-----	-----

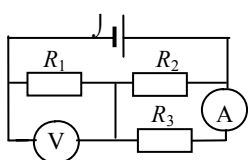
Задачи 213. Варианты: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35



Источник тока с ЭДС J и внутренним сопротивлением r , резистор R , реостат с полным сопротивлением R_1 , амперметр и вольтметр подключены, как показано на рисунке. Определить показания приборов при полностью введенном и выведенном реостате. Построить график изменения потенциала вдоль цепи при введении реостата наполовину.

№ вар	J , В	r , Ом	R , Ом	R_1 , Ом	R_1 , Ом	R_A , Ом
3	6	0,2	3	15	100	0,2
7	7	0,4	7	10	105	0,5
11	11	0,6	11	20	110	0,3
15	15	1,4	15	5	115	0,5
19	19	0,8	9	18	120	0,6
23	23	1	3	9	120	0,5
27	27	0,6	8	16	125	0,6
31	31	0,9	10	6	130	0,5
35	35	1,2	5	35	135	0,6

Задачи 213. Варианты: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36



Идеальный вольтметр показывает напряжение U . Внутреннее сопротивление источника r , сопротивления резисторов R_1 , R_2 и R_3 соответственно, а у амперметра – R_A . Определить ЭДС источника и показание амперметра. Построить график изменения потенциала

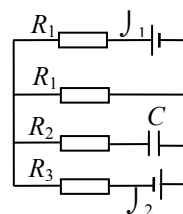
вдоль цепи.

№ вар	U , В	r , Ом	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	R_A , Ом
4	4	0,4	4	8	3,5	0,5
8	8	0,6	8	10	4,2	0,8
12	12	0,8	12	12	5	1
16	16	1,0	16	14	6,1	0,9
20	20	1,2	20	16	7,2	0,8
24	24	1,4	24	18	8	1
28	28	1,6	28	20	8,8	1,2
32	32	1,8	32	22	9,6	1,4

36	36	2	36	24	10,6	1,4
----	----	---	----	----	------	-----

Задачи 214. Варианты: 1, 8, 15, 22, 29, 36

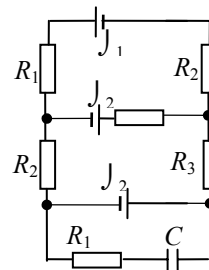
Определить силы токов на участках цепи, выделяемую в цепи за десять секунд теплоту и заряд на обкладках конденсатора. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.



№ вар	1	8	15	22	29	36
R_1 , Ом	8	10	5	12	29	8
R_2 , Ом	20	22	26	28	10	6
R_3 , Ом	5	25	8	30	6	9
C , мкФ	4	1,2	2,5	3	7	6
J_1 , В	6	8	5	22	29	6
J_2 , В	11	12	31	15	15	9

Задачи 214. Варианты: 2, 9, 16, 23, 30, 35

Определите силы тока на всех участках разветвленной цепи в установившемся режиме, разности потенциалов между клеммами источников тока и обкладками конденсатора, тепловую мощность цепи. Внутренние сопротивления источников r одинаковы.

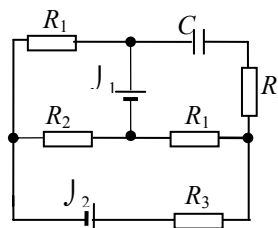


№ вар.	J_1 , В	J_2 , В	r , Ом	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	C , мкФ
2	2	4	0,2	2	4	6	2
9	9	5	0,3	9	5	3	6
16	6	8	0,6	6	2	4	5
23	23	9	1	10	5	8	3
30	30	5	0,6	9	3	5	3

35	35	6	0,5	5	3	10	10
----	----	---	-----	---	---	----	----

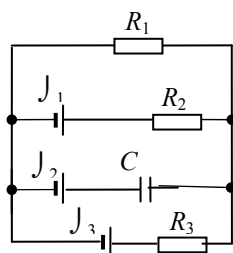
Задачи 214. Варианты: 3, 10, 17, 24, 31

Какая теплота выделяется в цепи за одну секунду и какой заряд находится на обкладках конденсатора? Внутренние сопротивления источников тока r одинаковы. Определить силы тока на участках цепи и разности потенциалов между клеммами источников.



№ вар.	$J_1, \text{В}$	$J_2, \text{В}$	$r, \text{Ом}$	$R_1, \text{Ом}$	$R_2, \text{Ом}$	$R_3, \text{Ом}$	$C, \text{мкФ}$
3	3	6	0,3	3	5	6	3
10	10	5	0,5	10	5	4	10
17	17	8	0,4	7	5	3	7
24	24	12	1	24	15	8	4
31	31	16	0,6	9	4	10	1

Задачи 14. Варианты: 4, 11, 18, 25, 32, 34

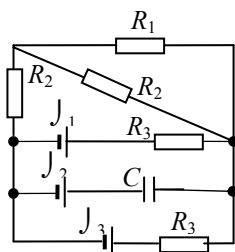


Какой заряд находится на обкладках конденсатора и какая теплота выделяется в цепи за двадцать секунд? Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Определить силы токов на участках цепи и разность потенциалов между клеммами источников.

№ вар.	$J_1, \text{В}$	$J_2, \text{В}$	$J_3, \text{В}$	$R_1, \text{Ом}$	$R_2, \text{Ом}$	$R_3, \text{Ом}$	$C, \text{мкФ}$
4	6	4	3	4	5	8	4
11	10	11	6	10	1	4	3
18	8	18	5	8	5	6	8
25	5	25	5	5	5	2	5
32	12	32	6	3	1	2	2

34	9	34	9	4	6	3	3
----	---	----	---	---	---	---	---

Задачи 214. Варианты: 5, 12, 19, 26, 33

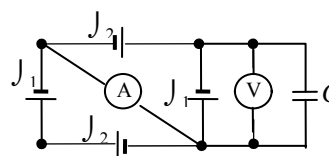


Определить силы токов на участках разветвленной цепи, заряд на обкладках конденсатора, тепловую мощность цепи и разность потенциалов между клеммами источников. Эти данные определить после полной зарядки конденсатора. Считать, что внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

№ вар.	$J_1, \text{В}$	$J_2, \text{В}$	$J_3, \text{В}$	$R_1, \text{Ом}$	$R_2, \text{Ом}$	$R_3, \text{Ом}$	$C, \text{мкФ}$
5	5	6	3	4	5	8	5
12	12	5	6	10	1	4	12
19	19	9	5	8	5	6	9
26	26	9	5	5	5	2	6
33	33	5	6	3	1	2	3

Задачи 214. Варианты: 6, 13, 20, 27, 38

Четыре источника постоянного тока включены так, как показано на рисунке. Найти показания амперметра и вольтметра, а также заряд на обкладках конденсатора.

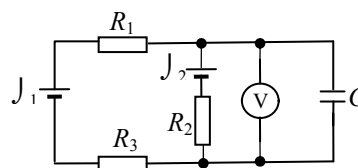


№ вар.	$J_1, \text{В}$	$J_2, \text{В}$	$r_1, \text{Ом}$	$r_2, \text{Ом}$	$R_A, \text{Ом}$	$R_V, \text{Ом}$	$C, \text{мкФ}$
6	6	4	0,2	0,4	0,006	600	6
13	6	13	0,3	0,5	0,05	300	12
20	20	9	0,2	0,3	0,02	200	2
27	27	9	0,1	0,7	0,07	700	7

38	38	8	0,4	0,3	0,04	400	4
----	----	---	-----	-----	------	-----	---

Задачи 214. Варианты: 7, 14, 21, 28, 37

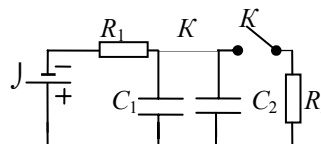
Определить силы тока на участках разветвленной цепи, показания вольтметра, заряд на обкладках конденсатора после завершения его зарядки, а также тепловую мощность цепи. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.



№ вар.	$J_1, В$	$J_2, В$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$R_V, Ом$	$C, мкФ$
7	7	9	7	4	6	60	7
14	14	7	4	14	5	30	4
21	24	12	21	30	2	200	2
28	28	14	8	4	7	80	8
37	37	17	5	3	4	50	5

Задачи 215. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37

В цепь постоянного тока подключены конденсаторы электроемкостью C_1 и C_2 , как показано на схеме. Значения сопротивлений резисторов R_1, R_2 кОм. ЭДС батареи J , внутреннее сопротивление r . Определить максимальные заряды, приобретаемые конденсаторами; время, через которое заряды достигают 86% максимального ($q = 0,86q_m$). Сначала ключ K разомкнут, и замыкается он после зарядки конденсатора. Определить заряд конденсаторов q после замыкания ключа.



№ вар.	$C_1, мкФ$	$C_2, мкФ$	$R_1, кОм$	$R_2, кОм$	$J, В$	$r, Ом$
1	1	7	10	20	10	6
7	2	6	7	14	14	3
13	3	4	13	26	13	2
19	4	5	15	30	19	8
25	5	3	5	10	23	3
31	6	2	6	12	29	5

37	7	1	8	16	35	4
----	---	---	---	----	----	---

Задачи 215. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

Во сколько раз катод двухэлектродной вакуумной лампы из чистого вольфрама при температуре t дает меньшее значение плотности тока насыщения, чем катод из торированного вольфрама? Коэффициент отражения электронов для вольфрама r_1 , а для торированного вольфрама – r_2 .

№ вар	2	8	14	20	26	32
$t, ^\circ C$	1200	1280	1300	1320	1340	1360
r_1	0,52	0,48	0,44	0,52	0,5	0,53
r_2	0,02	0,03	0,04	0,02	0,03	0,04

Задачи 215. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

Определить температуру катода двухэлектродной вакуумной лампы из торированного вольфрама T_2 , при которой плотность тока насыщения будет такой же, как и при катоде из чистого вольфрама при температуре t . Коэффициент отражения электронов для вольфрама r_1 , а для торированного вольфрама – r_2 . (Задачу решить путем последовательных приближений. Учитывая, что плотность тока насыщения в основном определяется множителем $\exp(-A_2/kT_2)$, в первом приближении можно положить $T_2^2 = T_1^2$, и из выражения для экспоненты найти второе приближение для T_2 , и т.д.)

№ вар	3	9	15	21	27	33
$t, ^\circ C$	1530	1490	1500	1510	1450	1520
r_1	0,58	0,49	0,45	0,51	0,5	0,51
r_2	0,03	0,01	0,03	0,02	0,03	0,01

Задачи 215. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Между пластинами плоского газового конденсатора находится частично ионизированный водород. Площадь пластин конденсатора S , а расстояние между обкладками l . Подвижность положительно заряженных ионов водорода u_+ , а отрицательных u_- . Концентрация ионов обоих знаков в газе равна n . При каком напряжении U между пласти-

нами конденсатора сила тока, протекающего через конденсатор, достигнет значения I ?

№ вар	4	10	16	22	28	34
$S, \text{ см}^2$	240	210	260	220	280	250
$l, \text{ см}$	1,4	1,1	1,6	1,2	1,3	1,5
$u_+, 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	5,4	5,3	5,6	5,5	5,4	5,2
$u_-, 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	7,4	7,1	7,6	7,2	7,3	7,5
$n, 10^{13} \text{ м}^{-3}$	5,4	5,1	5,6	5,2	5,6	5,5
$I, \text{ мкА}$	4	1	6	2	3	4

Задачи 215. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

В газоразрядной трубке диаметром d и длиной l находится воздух ионизированный так, что концентрация однозарядных ионов каждого знака n . Подвижность положительно заряженных ионов u_+ , а отрицательных u_- . Определить электрическое сопротивление трубки.

№ вар	5	11	17	23	29	35
$d, \text{ см}^2$	5	4	7	3	6	5
$l, \text{ см}$	84	81	86	82	85	83
$u_+, 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	1,4	1,3	1,5	1,2	1,4	1,3
$u_-, 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	1,8	1,9	1,9	1,7	1,6	1,9
$n, 10^{13} \text{ м}^{-3}$	4	1	3	2	2	1,5

Задачи 215. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

Электролитические ванны с растворами AgNO_3 и CuCO_4 соединены последовательно к одному источнику тока напряжением U . Какая масса меди m_2 выделится на электроде второй ванны за время, в течение которого на электроде первой ванны выделилась масса серебра m_1 ? Какое количество электричества переносится по цепи ионами обоих знаков? Какая электрическая энергия источника при этом будет затрачена?

№ вар	6	12	18	24	30	36
$U, \text{ В}$	6	5	6	12	6	12
$m_1, \text{ г}$	186	120	180	240	300	360

Задачи 216. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

Из металлического проводника Me диаметром d и длиной l нужно сделать n одинаковых нагревателей так, чтобы они имели общую максимальную мощность. Используется источник тока с ЭДС J и

внутренним сопротивлением r . Определить число нагревателей и максимальную мощность нагревателей.

№ вар	1	7	13	19	25	31
Me	Нихром	W	Манганин	Нихром	W	Нихром
$d, \text{см}^2$	1	0,7	1,3	1,1	1,5	1,2
$l, \text{см}$	100	70	130	90	95	110
$J, \text{В}$	24	27	23	19	25	31
$r, \text{Ом}$	1	0,7	1,3	0,9	1,5	1,3

Задачи 216. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

Нагреватель из металла Me диаметром d и длиной l подключили к источнику напряжения U . Начальная температура нагревателя t_1 , а конечная t_2 . Температура линейно возрастает в течение времени τ . Определить количество выделившейся теплоты.

№ вар.	Me	$d, \text{мм}$	$l, \text{м}$	$U, \text{В}$	$t_1, ^\circ\text{C}$	$t_2, ^\circ\text{C}$	$\tau, \text{мин}$
2	железо	0,2	20	20	2	512	20
8	константан	0,8	8	18	8	618	18
14	нихром	0,7	1,4	14	14	714	14
20	нейзильбер	0,2	2	20	20	720	20
26	константан	0,26	2,6	26	26	626	26
32	нихром	0,32	3,2	32	32	632	32

Задачи 216. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

При подключении термопары Me_1-Me_2 к последовательно соединенным гальванометру и сопротивлению R ток в цепи становится равным I_1 . Если сопротивление $R = 0$, то гальванометр показывает ток равный I_2 . Определить разность температур спаев гальванометра.

№ вар.	Me_1	Me_2	$R, \text{Ом}$	$I_1, \text{мА}$	$I_2, \text{мА}$
3	Медь	Константан	30	3	13
9	Железо	Константан	9	0,9	9
15	Хромель	Алюмель	15	1,5	15
21	Нихром	Никель	21	2,1	21
27	Нихром	Константан	27	2,7	27

33	Железо	Медь	3	5	15
----	--------	------	---	---	----

Задачи 216. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Найти массу металла, выделившуюся на катоде электролитической ванны из раствора P , при пропускании в течение времени τ тока, меняющегося со временем по закону $I = k t$. Построить график зависимости скорости выделения металла на катоде от времени. Определить количество прошедшего заряда.

№ вар	4	10	16	22	28	34
P	CuSO ₄	AgNO ₃	CuCl ₂	NaCl	NiSO ₄	CuSO ₄
τ , мин	4	10	6	2	8	5
k , мА/с	40	10	16	22	28	34

Задачи 216. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

Построить график зависимости плотности тока насыщения двухэлектродной вакуумной лампы от времени, если катод сделан из металла Me , коэффициент отражения электронов, которых r . Температура катода t .

№ вар	5	11	17	23	29	35
Me	W+Cs	Fe	Pt+Cs	W	W+Th	Ni
r	0,02	0,3	0,03	0,5	0,01	0,4
t , °C	1050	1400	1200	1500	1450	1600

Задачи 216. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30

Для отопления спальни осенью пользуются электронагревателем, спираль которого из сплава Sn диаметром d . Комната ежедневно теряет Q количество теплоты. Определить мощность нагревателя, необходимую для поддержания постоянной температуры, и длину спирали.

№ вар	6	12	18	24	30
Sn	Нихром	Константан	Манганин	Нейзильбер	Нихром
d , мм	0,6	1	0,8	0,84	1
Q , МДж	86	92	88	94	93

2 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

2.1 Основные формулы и определения

Вокруг движущихся заряженных частиц, проводников с током и около так называемых постоянных магнитов образуется магнитное поле. Посредством своих магнитных полей они взаимодействуют друг с другом.

Обращенный на север конец свободно висящего магнита называют *северным полюсом* (N), противоположный конец направлен на юг и называется *южным полюсом* (S) (рис. 2.1). Одноименные полюса двух магнитов отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Основной силовой характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции* – \mathbf{B} . За направление вектора \mathbf{B} принято направление силы \mathbf{F} , действующей на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в данную точку поля.

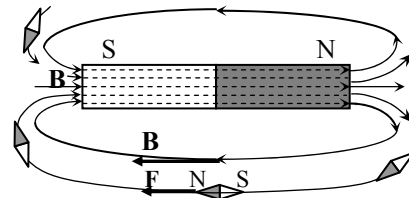


Рис. 2.1

На прямолинейный участок проводника с током, находящегося в магнитном поле (рис. 6.2), действует сила, называемая силой Ампера:

$$F_A = I l B \sin \alpha,$$

где F_A – сила, действующая на проводник с током длины l в магнитном поле с магнитной индукцией \mathbf{B} ; α – угол между направлением тока и вектором магнитной индукции.

Выражение для силы Ампера, действующей на малый элемент проводника dl с током можно записать в виде

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

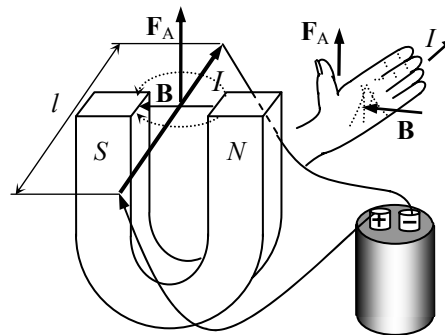


Рис. 2.2

Направление вектора $d\mathbf{l}$ – направленного элемента проводника – совпадает с направлением тока. Данная формула является математическим выражением закона Ампера: *сила, действующая на элемент проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы*

тока на векторное произведение направленного элемента проводника и вектора магнитной индукции.

Из закона Ампера для прямолинейного участка проводника можно определить численное значение вектора **B**:

$$B = \frac{F_A}{I \cdot l \sin \alpha}.$$

Если все величины в знаменателе данного выражения взять равными единице, то магнитная индукция будет равняться силе Ампера.

Таким образом, **вектор магнитной индукции В является силовой характеристикой магнитного поля. За направление вектора В принято направление силы F, действующей на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в данную точку поля. Магнитная индукция численно равняется силе Ампера, действующей на прямолинейный проводник единичной длины, помещенный перпендикулярно к силовым линиям магнитной индукции и по которому течет ток с силой в 1 ампер.**

Единица измерения вектора магнитной индукции:

$$[\mathbf{B}] = \frac{[F]}{[I][l]} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл (тесла)}.$$

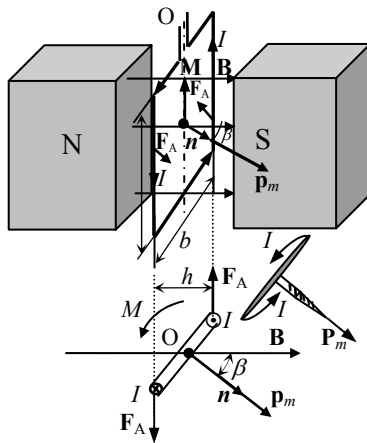


Рис. 2.3

Вращающий момент, действующий на рамку, равен моменту пары сил (рис. 2.3):

$$M = hF_A,$$

где $h = b \sin \beta$ – плечо пары сил. Отсюда

$$M = p_m B \sin \beta.$$

где $p_m = N I S n$ – магнитный момент рамки с током; $S = ab$ – площадь рамки; N – число витков.

Направление магнитного момента **p_m** можно определить по правилу правого буравчика: *если буравчик вращать по направлению тока в рамке, то его поступательное движение покажет направление магнитного момента рамки.*

Вектор вращающего момента **M** направлен по оси вращения так (рис.2.3), чтобы из его конца вращение рамки под действием пары сил было видно происходящим против часовой стрелки. Поэтому выраже-

ние для вращающего момента можно представить через векторное произведение векторов \mathbf{p}_m и \mathbf{B} :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}].$$

Отношение магнитной индукции в среде B к магнитной индукции в вакууме B_0 называется *магнитной проницаемостью среды*:

$$\mu = B/B_0.$$

Токи, текущие в проводниках и создающие внешнее магнитное поле, обычно называют *макроскопическими токами* (макроточками). В веществе существуют и *микроскопические токи*, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Когда вещество находится во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 , то характер движения электронов в атомах несколько изменяется, молекулярные микроточка определенным образом ориентируются в магнитном поле. Микроскопические молекулярные токи создают свое внутреннее магнитное поле с магнитной индукцией \mathbf{B}' , которое накладывается на магнитное поле макроточков \mathbf{B}_0 . Вектор магнитной индукции \mathbf{B} является суммарной силовой характеристикой результирующего магнитного поля как макроточков, так и микроточков:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'.$$

Поле микроточков может, как усилить ($\mu > 1$), так и ослабить поле макроточков ($\mu < 1$). Вещества, у которых $\mu < 1$, называются *диамагнетиками*, а у которых $\mu > 1$ – *парамагнетиками*.

Для характеристики магнитного поля макроточков ввели дополнительную силовую характеристику – *напряженность магнитного поля* \mathbf{H} . В однородной изотропной среде

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/(\mu_0 \mu),$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная (Гн – генри – единица измерения индуктивности).

Предполагая, что магнитные индукции от различных элементов проводника в рассматриваемой точке складываются как независимые векторные величины, П. Лаплас обобщив результаты Ж. Био и Ф. Савара получил формулу

$$dB = k \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} \equiv \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

или в векторной форме

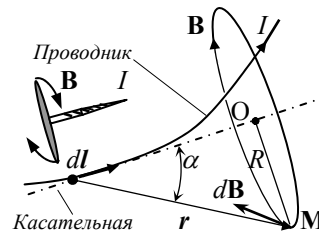


Рис. 2.4

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \sin \alpha}{r^2},$$

где $d\mathbf{B}$, $d\mathbf{H}$ – магнитная индукция и напряженность поля от элемента проводника $d\mathbf{l}$ с током в произвольной точке \mathbf{M} ; \mathbf{r} – радиус-вектор рассматриваемой точки \mathbf{M} относительно элемента проводника; α – угол между \mathbf{r} и касательной к проводнику, проведенной через направленный элемент проводника $d\mathbf{l}$ (рис. 2.4).

Коэффициент пропорциональности в законе Био–Савара–Лапласа k может быть выражен через ранее введенные постоянные

$$k = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} = \frac{\mu k_0}{c^2} = \frac{\mu}{4\pi \epsilon_0 c^2},$$

где $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Вектор $d\mathbf{B}$ направлен перпендикулярно к плоскости, содержащей векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} (для рассматриваемого случая направлен перпендикулярно к чертежу от нас).

Магнитная индукция прямолинейного участка проводника с током на расстоянии R от проводника (рис. 2.5):

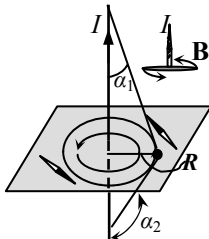


Рис. 2.5

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Для проводника бесконечной длины, то $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$. В итоге получатся более простые формулы для магнитной индукции и напряженности магнитного поля:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}, \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Единица измерения напряженности магнитного поля H :

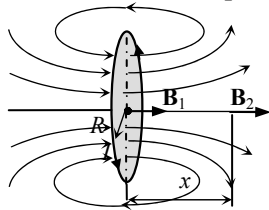


Рис. 2.6

$$[H] = \frac{[I]}{[R]} = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Магнитная индукция и напряженность поля в центре кругового витка с током (рис. 2.6):

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}, \quad H_1 = \frac{I}{2R}.$$

Магнитная индукция на оси кругового витка на расстоянии x от центра витка:

$$B = \frac{\mu_o \mu}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Если воспользоваться понятием вектора магнитного момента витка с током $p_m = \pi R^2 I$, то данное выражение можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o \mu}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{r^3}.$$

Эту величину называют *магнитным диполем*.

Соленоидом называется катушка индуктивности, состоящая из большого числа последовательно соединенных круговых витков, которые образуют винтовую линию. Соленоиды применяются для создания магнитного поля. Магнитное поле соленоида напоминает поле стержневого постоянного магнита (рис. 2.7). Магнитная индукция внутри соленоида возникает в результате суммирования полей, создаваемых каждым витком катушки, и может быть весьма большой.

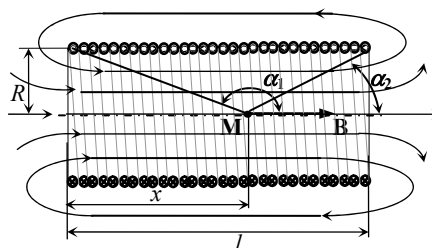


Рис. 2.7

На рис. 2.7 показан разрез соленоида радиусом R и длиной l , по виткам которого течет постоянный ток с силой I . Знаки \bullet изображают сечения витков, в которых ток направлен перпендикулярно к чертежу, к нам, а знаки \otimes – сечения витков, в которых электрический ток направлен от нас. Пусть N – общее число витков катушки. Тогда $n = N/l$ – число витков, приходящихся на единицу длины катушки. Магнитная индукция в произвольной точке \mathbf{M} на оси соленоида:

$$B = \frac{\mu_o \mu}{2} n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Если длина соленоида намного больше его радиуса, т.е. $R \ll l$, то в этом случае магнитная индукция в середине соленоида

$$B_{\max} = \mu_o \mu n I.$$

Данной простой формулой обычно пользуются для точек, лежащих вдали от торцов соленоида.

Между двумя параллельными проводниками с током бесконечной длины возникает сила магнитного взаимодействия.

$$F = \frac{\mu_o \mu I_1 I_2 l}{2\pi R}.$$

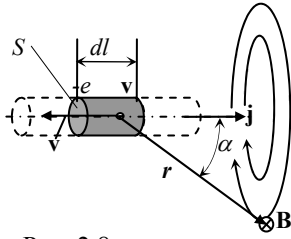


Рис. 2.8

Магнитная индукция \mathbf{B}_q движущегося заряда q (рис. 2.8):

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mu_0 \mu q}{4\pi r^3} [\mathbf{v}, \mathbf{r}] \quad \text{или} \quad B = \frac{\mu_0 \mu q v}{4\pi r^2} \sin \alpha .$$

Движущиеся в магнитном поле заряженные частицы изменяют свою траекторию движения, т.е. на них со стороны магнитного поля действует некоторая сила, называемая *силой Лоренца*, которую можно определить по кривизне траектории заряженных частиц, зная их заряд и массу. Сила, действующая на отдельную движущуюся в магнитном поле заряженную частицу со скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{F}_л = q [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

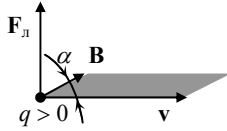


Рис. 2.9

На рис. 2.9 показано взаимное положение векторов \mathbf{v} , \mathbf{B} и $\mathbf{F}_л$ для положительно заряженной частицы. Сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости частицы и сообщает частице только центростремительное ускорение. Направление силы Лоренца, действующей на положительную частицу, можно определить по правилу левой руки. Сила Лоренца не изменяет величину скорости. Модуль силы равен

$$F_л = qvB \sin \alpha .$$

Пусть скорость заряженной частицы \mathbf{v} составляет угол α с вектором магнитной индукции \mathbf{B} (рис. 2.10). Движение частицы является суммой двух движений: она равномерно вращается по окружности радиусом за счет перпендикулярной к вектору \mathbf{B} скорости \mathbf{v}_\perp

$$R = mv_\perp / (qB) = mv \sin \alpha / (qB),$$

и движется поступательно с постоянной скоростью \mathbf{v}_\parallel в направлении вектора \mathbf{B} . Поэтому траектория движения представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с направлением вектора магнитной индукции, т.е. частица движется по поверхности цилиндра радиусом R . Расстояние между соседними витками (шаг спирали):

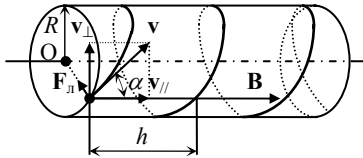


Рис. 2.10

$$h = v_\parallel T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB} .$$

У положительной частицы траектория движения левовинтовая, у отрицательной – правовинтовая линия.

В 1897 г. американский физик Э.Г. Холл пропускал постоянный ток I через золотую пластинку (рис. 2.11), которая находилась в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} . Вектор \mathbf{B} был направлен перпендикулярно боковым граням пластинки, как показано на рисунке. Ток тек вдоль оси x . Между двумя точками 1 и 2, находящимися на верхней и нижней гранях, возникла разность потенциалов (ЭДС Холла), определяемая соотношением

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = RIB/b = \frac{IB}{qnb}$$

где b – ширина пластинки; R – постоянная Холла; n – концентрация свободных электронов.

Закон полного тока (закон Ампера): **циркуляция напряженности магнитного поля \mathbf{H} вдоль замкнутого контура L равняется алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:**

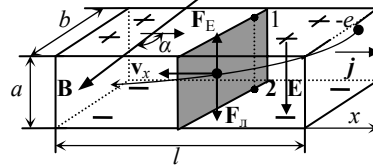


Рис. 2.11

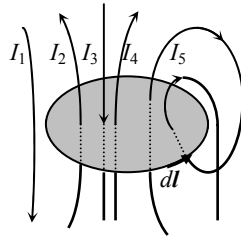


Рис. 2.12

$$\int_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N I_i,$$

где N – число проводников с токами, охватываемых произвольным замкнутым контуром L .

Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода контура по правилу правого буравчика. Ток противоположного направления считается отрицательным. Например, для токов, изображенных на рис. 2.12,

$$\int_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \cdot I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + 2I_5.$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности \mathbf{H} имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике. С помощью этой теоремы можно определить напряженность магнитного поля системы токов. В качестве примера рассчитаем напряженность магнитного поля внутри *тороида*.

Тороид – кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 2.13). Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне него поле отсутствует.

В качестве замкнутого контура возьмем одну такую окружность радиусом r . Циркуляция напряженности вдоль этого контура $Z_H = H \cdot 2\pi r$, так как вдоль силовой линии напряженности $H = \text{const}$.

По закону полного тока

$$Z_H = NI,$$

где N – число витков тороида, которых охватывает контур. Отсюда следует, что напряженность магнитного поля внутри тороида

$$H = \frac{NI}{2\pi \cdot r} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi \cdot r}.$$

Пусть в магнитном поле имеется произвольная поверхность S (рис. 2.14). Возьмем малый элемент поверхности – dS . Проведем нормаль \mathbf{n} к элементарной площадке. $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ – вектор направленной площадки, направление которого совпадает с направлением нормали к площадке, а модуль равняется dS .

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется скалярная физическая величина

$$d\Phi_m = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B \cos \alpha dS,$$

где α – угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{B} .

Поток вектора \mathbf{B} может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos \alpha$ (определяется выбором положительного направления нормали \mathbf{n}). Поток вектора магнитной индукции через всю произвольную поверхность определяется суммированием элементарных потоков через все ее малые элементы:

$$\Phi_m = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \iint_S B \cos \alpha dS.$$

Из определения силовых линий магнитной индукции вытекает, что **магнитный поток численно равняется количеству силовых линий индукции, пронизывающих рассматриваемую поверхность.**

Если в однородном магнитном поле находится плоскость (рис. 6.24), то поток напряженности через нее $\Phi_m = B \cos \alpha S$. Из этой формулы определяется единица измерения магнитного потока *вебер*:

$$[\Phi_m] = [B] [S] = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = \text{Вб}.$$

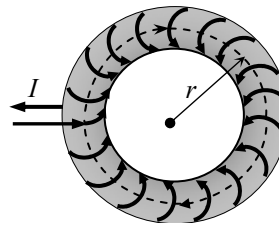


Рис. 2.13

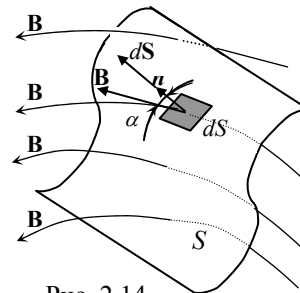


Рис. 2.14

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oiint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

т.е. сколько силовых линий магнитной индукции войдут в замкнутую поверхность, столько и выйдут.

Данная формула является математическим выражением **теоремы Гаусса для магнитного поля** и показывает, что в природе нет магнитных «зарядов» – источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались линии магнитной индукции.

Магнитную индукцию однородного поля внутри соленоида приближенно можно вычислить по формуле

$$B = \mu_0 \mu NI/l,$$

где, N – общее число витков; l – длина соленоида.

Суммарный магнитный поток, пронизывающий поверхности, натянутые на все витки контура называется потоко-сцеплением контура:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i .$$

Так как поверхности контуров всех витков длинного соленоида пронизывает практически одинаковый магнитный поток, для катушки индуктивности потоко-сцепление определяется по формуле

$$\Psi = N \Phi_1 = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S ,$$

где S – площадь поперечного сечения соленоида.

Работа перемещения проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток через поверхность dS , пересекаемую проводником при его перемещении (рис. 2.16):

$$dA = I d\Phi_m.$$

Пусть в магнитном поле перемещается замкнутый контур с током из положения $abcd$ в положение $a'b'c'd'$ (рис. 2.17). Вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен перпендикулярно к чертежу от нас.

Работа перемещения контура с током в магнитном поле:

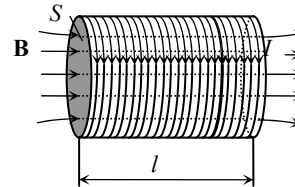


Рис. 2.15

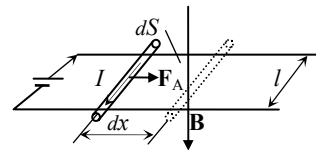


Рис. 2.16

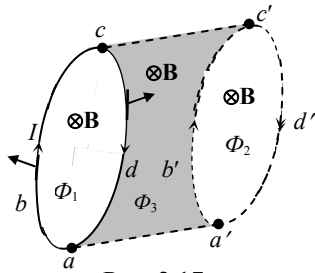


Рис. 2.17

$$A = I \Delta \Phi.$$

где $\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – изменение магнитного потока через поверхность, натянутую на контур с током.

Если контур состоит из последовательно соединенных нескольких витков, то вместо изменения магнитного потока надо использовать изменение потокосцепления:

$$A = I \Delta \Psi.$$

Работа сил Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с током равна произведению силы тока в контуре на изменение его потокосцепления. Причем потокосцепление может изменяться как за счет изменения индукции магнитного поля, так и за счет поворота или деформации контура.

Открытое М.Фарадеем явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении его потокосцепления получило название явления **электромагнитной индукции** (рис. 2. 18).

Фарадей количественно исследовал факторы, влияющие на величину ЭДС индукции, и сформулировал закон гласящий, что **ЭДС электромагнитной индукции в контуре равна скорости изменения потокосцепления сквозь поверхность, натянутую на этот контур:**

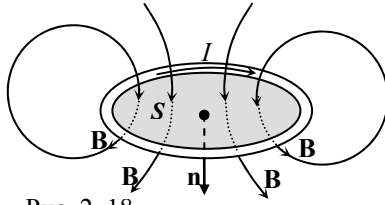


Рис. 2. 18

$$J_i = - \frac{d\Psi}{dt},$$

Знак «-» в законе Фарадея определяет направление действия ЭДС индукции. Профессор Петербургского университета Э. Х. Ленц (1833) исследовал связь между направлением индукционного тока и характером вызвавшего его изменения магнитного потока. Он установил следующий закон – **правило Ленца: при изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению внешнего магнитного поля.**

Пусть силовые линии однородного магнитного поля перпендикулярны к чертежу и направлены от нас (рис.2.19). В этом поле перпендикулярно к вектору **B** с постоянной скоростью **v** движется металли-

ческий проводник длиной l . На свободные электроны, упорядоченно движущиеся вместе с проводником, действует сила Лоренца

$$F_{\text{л}} = e\nu B.$$

Под действием этой силы электроны перемещаются к нижнему концу проводника и создают там избыток отрицательных зарядов. Противоположный конец проводника приобретает соответствующий положительный заряд. Между концами проводника возникает разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Возникающая разность потенциалов $\Delta\varphi$ и является ЭДС индукции:

$$J_i = Bl\nu.$$

Данное соотношение справедливо при условии, что проводник, векторы \mathbf{B} и \mathbf{v} взаимно перпендикулярны. Если они не перпендикулярны, то учитываются их взаимно перпендикулярные компоненты.

Наиболее важным практическим результатом открытия Фарадея является создание *электрогенератора* (динамомашин). Генератор преобразует механическую энергию в электрическую, его действие противоположно действию электродвигателя. Устройство генератора переменного тока упрощенно изображено на рис. 2.20.

В генераторе имеется несколько проводочных обмоток на роторе. На рисунке показана только одна из них в виде рамки. Ось рамки $O-O$ вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ в постоянном магнитном поле между полюсами постоянных магнитов с индукцией \mathbf{B} . Потокосцепление вращающейся обмотки в произвольный момент времени t :

$$\Psi = NBS\cos\varphi = NBS\cos(\omega t),$$

где N – число витков обмотки; S – площадь рамки; $\varphi = \omega t$ – угол поворота нормали к рамке относительно вектора \mathbf{B} в момент времени t (при $t = 0$, $\varphi = 0$). Как видим, потокосцепление рамки является переменной величиной. Поэтому согласно закону Фарадея в ней будет возбуждаться ЭДС индукции

$$J_i = - \frac{d\Psi}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t).$$

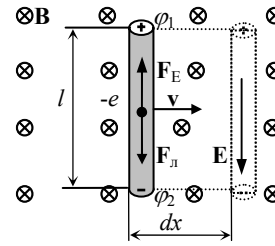


Рис. 2.19

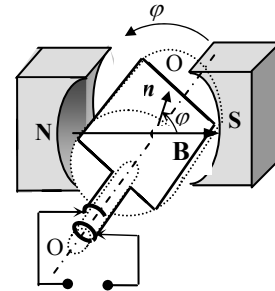


Рис. 2.20

Потокоцепление контура, вызванное этим полем, пропорционально силе тока:

$$\Psi_c = L I.$$

Индуктивностью (собственной индуктивностью) называется скалярная величина L , равная отношению потокоцепления самоиндукции контура Ψ_c к силе тока I в этом контуре:

$$L = \Psi_c / I.$$

Из данного выражения определяется единица измерения индуктивности – *генри*:

$$[L] = [\Psi]/[I] = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В}\cdot\text{с/А} = 1 \text{ Гн}.$$

1 Гн – индуктивность такого контура, потокоцепление самоиндукции которого при токе 1 А равно 1 Вб.

Индуктивность катушки:

$$L = \mu_0 \mu N^2 S / l,$$

т.е. индуктивность соленоида зависит от числа витков N , его длины l , площади поперечного сечения S и магнитной проницаемости μ вещества, из которого сделан сердечник соленоида.

Явление возникновения ЭДС электромагнитной индукции в электрической цепи вследствие изменения в ней электрического тока называется самоиндукцией. ЭДС J_{ci} , возникающая в цепи, называется *электродвижущей силой самоиндукции*.

ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока в цепи:

$$J_{ci} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что ЭДС самоиндукции противодействует изменению электрического тока в цепи, т.е. замедляет его возрастание или убывание.

Наведение ЭДС индукции во всех проводниках, находящихся вблизи цепи переменного тока называется явлением взаимной индукции.

Пусть на общий железный сердечник намотаны витки двух катушек (рис. 2.21). Число витков катушек соответственно равно N_1 и N_2 . По первой обмотке пропускается ток от источника переменного напряжения J_1 . Этот ток создает переменное магнитное поле с магнитным потоком

$$\Phi_1 = \mu_0 \mu N_1 S I_1 / l,$$

где I_1 – сила тока в первичной обмотке; S – площадь поперечного сечения сердечника; l – его длина по средней линии.

Магнитное поле в основном сосредоточено в сердечнике, поэтому поле первичной обмотки пронизывает и витки вторичной обмотки.

Потокосцепление второй катушки

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_1 = \mu_0 \mu N_1 N_2 S I_1 / l.$$

Скалярная величина L_{21} , равная отношению потокосцепления взаимной индукции второй катушки (контур) к силе тока в первом контуре, называется *коэффициентом взаимной индуктивности*:

$$L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1}.$$

Учитывая формулу для Ψ_2 , коэффициент взаимной индуктивности двух катушек, имеющих один общий замкнутый сердечник, определяем по формуле

$$L_{21} = \mu_0 \mu N_1 N_2 S / l,$$

где μ – магнитная проницаемость материала сердечника. Нетрудно показать, что $L_{21} = L_{12}$.

ЭДС взаимной индукции во втором контуре пропорциональна скорости изменения силы тока в первом контуре:

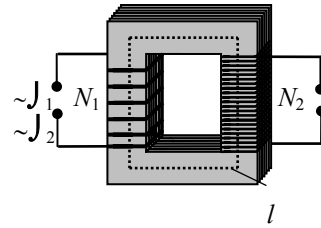
$$J_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Соотношение между ЭДС первичной и вторичной обмоток:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = -\frac{N_2}{N_1},$$

где знак минус показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Рассмотренное устройство называется трансформатором. В современных трансформаторах потери энергии не превышают 2% и связаны в основном с выделением в обмотках джоулевой теплоты и появлением вихревых токов. Поэтому, применяя закон сохранения энер-



гии, можем записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$J_2 I_2 \approx J_1 I_1.$$

Полная энергия W_m , запасенная в магнитном поле при возрастании тока от нуля до I , равна полной работе источника тока на создание этого поля:

$$W_m = \int_0^I dA = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}.$$

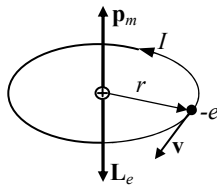


Рис. 2.22

Сила микротока, обусловленного движением электрона по круговой орбите радиусом r со скоростью v :

$$I = ev = e\nu/(2\pi r),$$

где e – элементарный заряд; ν – частота обращения электрона по круговой орбите длиной $2\pi r$. Направление орбитального микротока показано на рис. 2.22 стрелкой.

Орбитальному току соответствует *орбитальный магнитный момент* \mathbf{p}_m , который направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона, а его модуль

$$p_m = IS = \frac{1}{2} evr,$$

где $S = \pi r^2$ – площадь орбиты.

Векторная сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома называется *орбитальным магнитным моментом атома*:

$$\mathbf{P}_m = \sum_{i=1}^Z \mathbf{p}_{mi},$$

где Z – число электронов в атоме, равное порядковому номеру элемента в периодической системе.

Диамагнетиками являются вещества, орбитальные магнитные моменты атомов которых при отсутствии внешнего магнитного поля равны нулю. К диамагнетикам относятся ряд металлов (например, Вi, Ag, Au, Cu, Zn), Si, Ge, инертные газы, молекулярные водород и азот, вода, ацетон и многие др. Во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_o атом диамагнетика приобретает *наведенный магнитный момент*.

$$\Delta \mathbf{P}_m = -e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle \mathbf{B}_o / (4\pi m),$$

где $\langle S_{\perp} \rangle$ – среднее значение площади для орбит всех электронов.

Вещества, у которых атомы обладают собственным магнитным моментом \mathbf{P}_m , называются *парамагнетиками*. К парамагнетикам относятся многие металлы (щелочные и щелочноземельные, некоторые переходные металлы, а также сплавы этих металлов), кислород, NO, MnO, FeCl₂ и др.

В отсутствие внешнего магнитного поля собственные магнитные моменты отдельных атомов ориентированы беспорядочно (на рис. 2.23а показаны стрелками).

Поэтому суммарный магнитный момент атомов, находящихся в малом объеме ΔV , равняется нулю. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов по направлению силовых линий

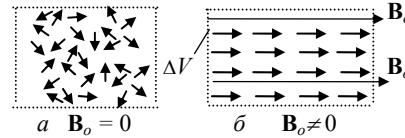


Рис. 2.23

внешнего поля \mathbf{B}_o (рис.2.23б). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот эффект называется *парамагнитным*.

Количественной характеристикой намагниченного состояния вещества служит векторная величина – *намагниченность \mathbf{J} , равная отношению суммарного магнитного момента макроскопически малого объема вещества к этому объему ΔV :*

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{mi},$$

где \mathbf{p}_{mi} – магнитный момент i -го атома из общего числа N атомов, содержащихся в объеме ΔV .

Как показывает опыт, в несильных магнитных полях намагниченность прямо пропорциональна напряженности поля, вызывающего намагничивание:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где χ – безразмерная величина, называемая *магнитной восприимчивостью вещества*. Для диамагнетиков $\chi < 0$, для парамагнетиков $\chi > 0$.

Ферромагнетиками называются вещества, которые при не очень высоких температурах обладают самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью.

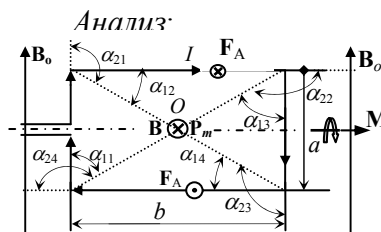
2.2 Примеры решения задач

Пример 1. По замкнутому проводящему контуру прямоугольной формы размерами $a \times b$, где $a = 10$ см, $b = 20$ см, течет постоянный ток $I = 10$ А. Плоскость контура параллельна силовым линиям однородного внешнего магнитного поля с индукцией $B_0 = 0,02$ Тл. Определить напряженность магнитного поля рамки и магнитную индукцию в центре контура, а также магнитный момент контура; вращающий момент, действующий на контур со стороны внешнего поля; результирующую магнитную индукцию в центре рамки.

Дано:

$$\begin{array}{l} a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м} \\ b = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м} \\ I = 10 \text{ А} \\ B_0 = 0,02 \text{ Тл} \end{array}$$

$$H, B, p_m, M, B_{\Sigma}$$



Пусть рамка и силовые линии внешнего магнитного поля лежат в плоскости чертежа и ток по рамке течет по часовой стрелке, как показано на рисунке. Стороны рамки представляют собой прямолинейные проводники конечной длины. По правилу правого буравчика можно установить, что векторы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ магнитной индукции в точке O от всех четырех сторон контура направлены перпендикулярно к чертежу от нас. Поэтому результирующий вектор \mathbf{B} магнитного поля рамки также будет направлен в том же направлении и его модуль определится алгебраическим суммированием

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Для определения магнитных индукций отдельных сторон контура воспользуемся формулой

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Введем второй индекс углов α для обозначения номера стороны прямоугольника. Парно длины двух сторон контура равны, и, очевидно, в центре контура будут одинаковы и численные значения магнитных индукций этих сторон: $B_1 = B_3, B_2 = B_4$. Магнитная индукция от левой стороны контура в точке O

$$B_1 = \frac{\mu_o \mu I}{2\pi b} (\cos\alpha_{11} - \cos\alpha_{21}).$$

Индукция верхней стороны в той же точке

$$B_2 = \frac{\mu_o \mu I}{2\pi a} (\cos\alpha_{12} - \cos\alpha_{22}).$$

Из рисунка видно, что

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{11} = \cos\alpha_{13} &= a/\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos\alpha_{12} = \cos\alpha_{14} = b/\sqrt{a^2 + b^2}; \\ \cos\alpha_{21} = \cos\alpha_{23} &= -a/\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos\alpha_{22} = \cos\alpha_{24} = -b/\sqrt{a^2 + b^2}; \end{aligned}$$

С учетом этих выражений

$$B_1 = \frac{\mu_o \mu \cdot a I}{\pi \cdot b \sqrt{a^2 + b^2}}; \quad B_2 = \frac{\mu_o \mu \cdot b I}{\pi \cdot a \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Следовательно, результирующая индукция и напряженность магнитного поля

$$B = 2 B_1 + 2 B_2 = \frac{\mu_o \mu 2I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi \cdot ab},$$

$$H = \frac{2I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi \cdot ab}.$$

Магнитный момент контура равняется произведению силы тока в контуре на площадь поверхности, натянутой на контур:

$$p_m = IS = I ab.$$

По правилу правого буравчика, вектор \mathbf{p}_m перпендикулярен к плоскости рамки и направлен от нас. Таким образом, угол между направлениями вектора магнитной индукции внешнего поля \mathbf{B}_o и \mathbf{p}_m составляет $\beta = \pi/2$. Силы Ампера, действующие на верхнюю и нижнюю стороны рамки (направления на рисунке показаны условными знаками), создают вращающий момент относительно горизонтальной оси

$$M = p_m B_o.$$

Направление вращающего момента (и направление возможного вращения контура) показано на рисунке стрелкой. Вращающий момент \mathbf{M} направлен по оси рамки.

Результирующая магнитная индукция в центре рамки определяется как векторная сумма магнитных индукций внешнего поля \mathbf{B}_o и магнитной индукции самой рамки \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_\Sigma = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}.$$

Так как векторы \mathbf{B}_o и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны, то численное значение индукции результирующего поля можно определить по теореме Пифагора:

$$B_{\Sigma} = \sqrt{B_o^2 + B^2}.$$

Тангенс угла наклона вектора \mathbf{B}_{Σ} по отношению к направлению \mathbf{B}_o :

$$\operatorname{tg} \varphi = B/B_o.$$

Анализ размерностей:

$$[H] = \frac{[a] \cdot [I]}{[a][b]} = \frac{\text{А}}{\text{М}}.$$

$$[B] = \frac{[\mu_o][a][I]}{[a][b]} = \frac{\text{Н}/\text{А}^2 \cdot \text{М} \cdot \text{А}}{\text{М} \cdot \text{М}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{М}} = \text{Тл}.$$

$$[\mathbf{p}_m] = [I] \cdot [S] = \text{А} \cdot \text{М}^2.$$

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{p}_m] \cdot [\mathbf{B}] = \text{А} \cdot \text{М}^2 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{М}} = \text{Н} \cdot \text{М}.$$

Решение:

В условии задачи не указывается, в какой среде находится контур с током. Поэтому предполагаем, что среда – воздух. Магнитная проницаемость воздуха практически $\mu \approx 1$.

$$B = \frac{\mu_o \mu 2I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10 \sqrt{0,1^2 + 0,2^2}}{\pi \cdot 0,1 \cdot 0,2} = 0,894 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

$$H = \frac{2I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab} = \frac{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{0,1^2 + 0,2^2}}{\pi \cdot 0,1 \cdot 0,2} = 71,2 \frac{\text{А}}{\text{М}}.$$

$$p_m = I a b = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ А} \cdot \text{М}^2.$$

$$M = p_m \cdot B_o = 0,2 \cdot 0,02 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{М}.$$

$$B_{\Sigma} = \sqrt{B_o^2 + B^2} = \sqrt{2^2 \cdot 10^{-4} + 0,894^2 \cdot 10^{-8}} = 0,0200002 \text{ Тл}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(B/B_o) = \operatorname{arctg}(0,894 \cdot 10^{-4}/0,02) = 0,256^\circ.$$

Как видим, влияние магнитного поля контура на магнитную индукцию результирующего поля в центре контура незначительное.

Ответ:

Магнитная индукция в центре прямоугольного контура с током

$$B = 0,894 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Напряженность магнитного поля в центре контура $H = 71,2 \text{ А/м.}$

Магнитный момент контура с током $p_m = 0,2 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$

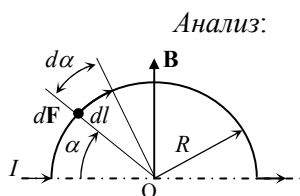
Вектор магнитной индукции \mathbf{B} и магнитный момент контура направлены перпендикулярно плоскости рамки от нас.

Вращающий момент, действующий на контур: $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м.}$
 При данном расположении плоскости рамки относительно силовых линий магнитной индукции внешнего поля вращающий момент является максимальным.

Влияние магнитного поля контура на магнитную индукцию результирующего поля в центре контура незначительное.

Пример 2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ расположен тонкий проводник в виде полуокружности радиусом $R = 30 \text{ см}$, по которому течет ток $I = 4 \text{ А}$. Направления силовых линий магнитной индукции и тока показаны на рисунке. Определить силу, действующую на дугообразный участок проводника.

Дано:
 $B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$
 $R = 30 \text{ см}$
 $I = 4 \text{ А}$
 F



Как видно из рисунка, каждый элемент проводника расположен по разному относительно магнитного поля. Разделим проводник на столь малые участки, чтобы каждый из них мож-

но было считать прямолинейным элементом тока. Рассмотрим один такой участок, длина которого

$$dl = R d\alpha.$$

Численное значение (модуль) силы Ампера, действующей на этот участок, составляет

$$dF = IdlB \sin \beta = IBR d\alpha.$$

При заданном расположении проводника относительно вектора магнитной индукции \mathbf{B} все элементарные силы $d\mathbf{F}$ направлены к нам перпендикулярно к чертежу ($\beta = \pi/2$). Поэтому векторное суммирование сводится к алгебраическому суммированию

$$F = \int_0^{\pi} IBR d\alpha = 2IRB.$$

Анализ размерностей:

$$[F] = [I] [R] [B] = \text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{Н} / (\text{А} \cdot \text{м}) = \text{Н}.$$

Решение:

$$F = 2IRB = 2 \cdot 4 \cdot 0,3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

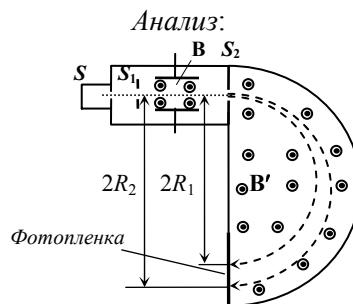
Ответ:

Сила, действующая на дугообразный участок проводника с током в магнитном поле: $F = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$.

Пример 3. В масс-спектрометре исследуется смесь атомов углерода с атомами неизвестного вещества. Радиус кривизны траектории атомов углерода в масс-спектрометре равен $R_1 = 21,2 \text{ см}$, а для атомов неизвестного вещества – $R_2 = 24,8 \text{ см}$. Какой элемент присутствует в образце?

Дано:

$m_c = 12,0 \text{ а.е.м}$	
$R_1 = 21,2 \text{ см}$	
$R_2 = 24,8 \text{ см}$	
m_x	



Масс-спектрометры используются для определения масс атомов. Ионы исследуемого вещества образуются в источнике благодаря нагреву или электрическому разряду. Пройдя через щель S_1 , ионы попадают в скрещенные электрическое и магнитное поля. Только ионы, имеющие скорость $v = E/B$, пройдут эту область без отклонений и смогут попасть в щель S_2 , так как в этом случае сила, действующая на частицу со стороны электрического поля, в точности компенсируется силой, действующей со стороны магнитного поля. Подобное устройство называется селектором скоростей. На рисунке силовые линии магнитного поля направлены к нам, перпендикулярно к чертежу. В

области за щелью S_2 имеется только магнитное поле с индукцией \mathbf{B}' , и ионы под действием силы Лоренца движутся по дуге окружности радиусом

$$R = m\nu/(qB').$$

Радиус кривизны можно измерить, поставив на пути движения ионов фотографическую пластинку. Так как $\nu = E/B$, получаем формулу для массы иона:

$$m = qBB'R/E.$$

Если считать, что ионы имеют одинаковый заряд q , то отношение масс ионов будет равняться отношению радиусов кривизны:

$$m_x/m_c = R_2/R_1.$$

Отсюда масса неизвестного иона

$$m_x = m_c R_2/R_1,$$

где m_c – масса атомов углерода.

Анализ размерностей:

$$[m_x] = [m_c] [R_2] / [R_1] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{м} \text{ кг}$$

Решение:

$$m_x = m_c R_2/R_1 = 12 \cdot 24,8 / 21,2 = 14,0 \text{ а.е.м.}$$

Здесь массу атомов ионов взяли в а.е.м.

Ответ:

Судя по массе ($m_x = 14,0$ а.е.м.), неизвестным элементом, по видимому, является азот. Им, однако, могут быть также изотопы углерода или кислорода, имеющие такую же массу. Это можно установить лишь с помощью дополнительного физического анализа.

Пример 4. Прямоугольный проводящий контур расположен в плоскости xu так, что одна его сторона ($a = 50$ см) параллельна оси x , а другая ($b = 20$ см) – оси u . Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рамки, а градиент его – вдоль оси u . С какой скоростью должно происходить перемещение контура вдоль оси u , чтобы в контуре индуцировалась ЭДС индукции, равная 2 В при градиенте магнитного поля, равном 2 Тл/м? Какое направление индукционного тока в контуре?

Дано:

$$a = 0,5 \text{ м}$$

$$b = 0,2 \text{ м}$$

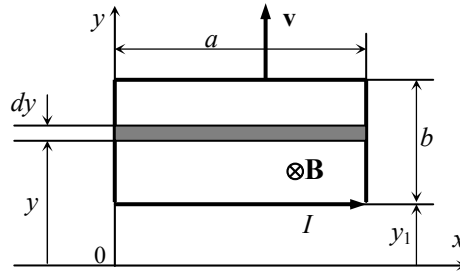
$$J_i = 2 \text{ В}$$

$$\frac{dB}{dy} = g = 2 \text{ Тл/м}$$

$$v$$



Анализ:



Возьмем элементарную площадку $dS = a dy$ и вычислим магнитный поток через эту площадку. Пусть вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен перпендикулярно к рамке от нас (на схеме изображен знаком \otimes). По условию задачи, вдоль оси x магнитная индукция не меняется, а вдоль оси y меняется по линейному закону:

$$B = B_0 + g y, \quad (\text{так как } \frac{dB}{dy} = g = \text{const})$$

В пределах dy изменением магнитной индукции можно пренебречь, поэтому магнитный поток через элементарную площадку dS :

$$d\Phi_m = B dS = (B_0 + g y) a dy = B_0 a dy + g a y dy.$$

Магнитный поток через всю рамку:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = B_0 a \int_{y_1}^{y_1+b} dy + g a \int_{y_1}^{y_1+b} y dy = B_0 a b + g a b y_1 + g a b^2 / 2,$$

где y_1 – текущее положение нижней кромки рамки.

По закону Фарадея, ЭДС индукции равняется скорости изменения магнитного потока через рамку:

$$J_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = -g a b \frac{dy_1}{dt} = -g a b v,$$

где $\frac{dy_1}{dt} = v$ – скорость перемещения рамки, а производные по времени от первой и третьей слагаемых магнитного потока через рамку равны нулю. Знак минус определяет направление тока.

Таким образом, скорость перемещения рамки

$$v = J_i / (g a b).$$

Магнитная индукция увеличивается по мере перемещения рамки. Поэтому магнитная индукция индукционного тока должна быть направлена противоположно магнитной индукции внешнего поля. Для

этого индукционный ток через рамку должен быть направлен против часовой стрелки, как показано на рисунке.

Анализ размерности:

$$[v] = [J] / ([g][a][b]) = \frac{В}{(Т/м) \cdot м \cdot м} = \frac{В}{Т \cdot м} = \frac{Дж/Кл}{Н/А} = \frac{Нм/Ас}{Н/А} = \frac{м}{с}.$$

Решение:

$$v = J_i / gab = \frac{2}{2 \cdot 0,5 \cdot 0,2} = 10 \text{ м/с}.$$

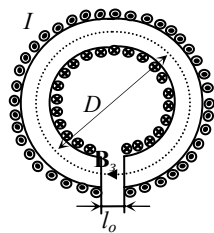
Ответ:

Скорость движения рамки $v = 10 \text{ м/с}$.

Пример 5. Обмотка тороида, содержащая стальной сердечник с вакуумным зазором длиной $l_o = 3 \text{ мм}$, имеет $N = 960$ витков. Средний диаметр тороида $D = 30 \text{ см}$. Сила тока в обмотке тороида $I = 3 \text{ А}$. Определить индукцию магнитного поля B_z в зазоре.

Дано:

$$\begin{array}{l} l_o = 0,003 \text{ м} \\ N = 960 \\ D = 0,3 \text{ м} \\ I = 3 \text{ А} \\ \hline B_z \end{array}$$



Анализ и решение:

Применим закон полного тока вдоль замкнутого контура, совпадающего со средней линией тороида диаметром D

$$H(\pi D - l_o) + H_o l_o = IN,$$

где H – напряженность магнитного поля в сердечнике; H_o – напряженность магнитного поля в зазоре. Так как магнитная проницаемость в вакууме $\mu = 1$, то $H_o = B_o / \mu_o$.

Вакуумный зазор узкий, поэтому силовые линии магнитной индукции заметно не искривляются, и будем считать радиальную составляющую магнитной индукции в зазоре равной нулю. На границе раздела двух сред нормальные составляющие вектора \mathbf{B} равны $B_n = B_{on}$. Отсюда $B = B_o$, получим выражение для B

$$B = \mu_o(IN - H(\pi D - l_o)) / l_o.$$

Эта формула при данном значении силы тока I выражает линейную зависимость между магнитной индукцией B и напряженностью H .

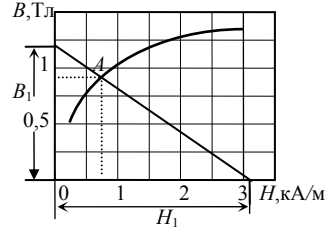
Однако зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля для стали имеет вид, представленный на графике жирной линией. На этом же рисунке построим график полученной линейной зависимости. Для этого вычислим координаты двух точек:

1) при $H = 0$, $B_1 = \mu_0 IN/l_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 960 / 3 \cdot 10^{-3} = 1,2$ Тл;

2) при $B = 0$, $H_1 = IN/(\pi D - l_0) = 3 \cdot 960 / (\pi \cdot 0,3 - 0,003) = 3,06$ кА/м.

Искомые значения B и H должны удовлетворять точке пересечения A представленных кривой и прямой. Из графика определяем параметры точки пересечения:

$B = 0,9$ Тл; $H = 700$ А/м.



Ответ:

Магнитная индукция в зазоре сердечника $B_s = 0,9$ Тл.

2.3 Задачи для РГР 22 по электромагнетизму

Задачи 221. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

По двум бесконечно длинным параллельным проводникам, расположенным на расстоянии a друг от друга, текут токи I_1 и I_1 в одном направлении. Определить магнитную индукцию и напряженность магнитного поля в точке, расположенном на расстоянии b от первого проводника и на расстоянии d от второго. Какая сила действует на протон, пролетающий со скоростью v параллельно проводникам через указанную точку?

№ вар.	1	7	13	19	25	31
a , см	5	7	8	9	6	4
I_1 , А	3	7	6	9	5	4
I_2 , А	6	5	4	6	8	7
b , см	10	6	13	11	9	5
d , см	5	7	8	9	6	4
v , 10^6 м/с	1	7	1,3	1,1	5	3

Задачи 221. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

По двум бесконечно длинным параллельным проводникам, расположенным на расстоянии a друг от друга, текут токи I_1 и I_1 в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию и напряженность магнитного поля в точке, расположенном на расстоянии b от первого проводника и на расстоянии d от второго. Какая сила действует на электрон, пролетающий со скоростью v параллельно проводникам через указанную точку?

№ вар.	2	8	14	20	26	32
a , см	6	8	7	10	6	5
I_1 , А	2	8	7	10	6	4
I_2 , А	6	5	4	6	8	7
b , см	8	6	12	10	9	5
d , см	5	7	8	9	6	4
v , 10^7 м/с	2	8	1,4	2	6	3

Задачи 221. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

Бесконечный прямолинейный проводник, по которому течет ток I , образует круговую петлю. Определить радиус петли, если напряженность магнитного поля в центре петли H . Какова магнитная индукция в центре петли? Какая сила действует на электрон, пролетающий со скоростью v параллельно проводнику через центр петли?

№ вар.	3	9	15	21	27	33
I , А	3	9	5	6	7	4
H , А/м	25	90	41	50	60	33
v , 10^7 м/с	3	9	5	2	7	3

Задачи 221. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

В плоскости кругового витка радиусом R и током I_1 расположен прямой бесконечный провод, по которому течет ток I_2 . Расстояние от центра витка до проводника a . Определить напряженность магнитного поля и магнитную индукцию в центре витка при двух направлениях тока в витке. Какая сила действует на протон, пролетающий со скоростью v параллельно проводнику через центр витка?

№ вар.	4	10	16	22	28	34
R , см	8	10	16	12	8	14
I_1 , А	4	2	3	2	5	4
I_2 , А	8	5	6	5	8	8
a , см	28	30	36	22	28	34
v , 10^6 м/с	4	1	6	2	8	4

Задачи 221. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

По длинному проводнику, согнутому под углом φ , течет постоянный ток I . Найти магнитную индукцию и напряженность магнитного поля в точке, находящейся на биссектрисе угла и отстоящей на расстоянии a от вершины угла. Какая сила действует на протон,

приближающийся вдоль биссектрисы к вершине угла со скоростью v и проходящий через указанную точку?

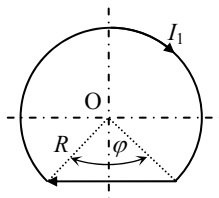
№ вар.	5	11	17	23	29	35
$\varphi, ^\circ$	50	110	60	80	90	60
$I, \text{А}$	5	11	17	3	9	5
$a, \text{см}$	5	11	7	3	9	5
$v, 10^6 \text{ м/с}$	5	1	7	3	9	5

Задачи 221. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

Напряженность магнитного поля в центре кругового витка радиусом R равна H . Найти напряженность магнитного поля и магнитную индукцию на оси витка в точке, расположенной на расстоянии x от центра. Какая сила действует на электрон, пролетающий параллельно плоскости витка со скоростью v через указанную точку?

№ вар.	6	12	18	24	30	36
$R, \text{см}$	6	12	8	9	10	6
$H, \text{А/м}$	36	20	30	24	25	40
$x, \text{см}$	6	4	8	6	10	8
$v, 10^6 \text{ м/с}$	6	2	8	4	3	4

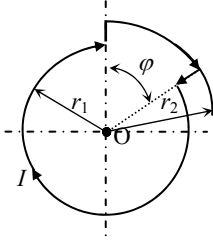
Задачи 222. Варианты: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31



Ток I_1 течет по тонкому замкнутому контуру с числом витков N . Радиус закругленной части R . Найти магнитную индукцию, напряженность магнитного поля в точке O и магнитный момент контура. Определить вращающий момент, действующий на данный контур, если он находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$, а силовые линии составляют угол $\beta = 30^\circ$ с нормалью к контуру.

№ вар.	1	6	11	16	21	26	31
$I, \text{А}$	1	6	11	16	21	26	9
N	100	60	110	160	210	260	310
$R, \text{мм}$	10	60	110	160	210	260	230
$\varphi, ^\circ$	100	60	110	60	60	50	30
μ	1,01	0,96	1,01	0,98	1,01	1,02	0,99

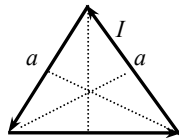
Задачи 222. Варианты: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32



Найти магнитную индукцию и напряженность магнитного поля в точке O контура с током I и его магнитный момент, если число витков N . Определить вращающий момент, действующий на данный контур, если он находится в однородном магнитном поле с индукцией B , а силовые линии составляют угол β с нормалью к контуру.

№ вар.	2	7	12	17	22	27	32
I , А	2	7	12	17	22	7	3,2
N	20	70	120	170	220	270	320
r_1 , мм	20	70	120	170	120	70	150
r_2 , мм	40	90	150	200	220	170	300
φ , °	120	60	120	140	22	70	30
μ	1,02	0,97	1,02	1,04	1,02	0,97	1,03
B , 10^{-2} Тл	2	6	1	1,4	2,2	2,7	3
β , °	20	60	12	17	22	27	30

Задачи 222. Варианты: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

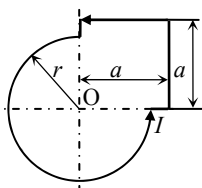


По замкнутому контуру в виде равностороннего треугольника с длиной сторон a и числом витков N течет ток с силой I . Определить напряженность магнитного поля и магнитную индукцию в точке пересечения высот, а также магнитный момент контура.

Магнитная проницаемость среды μ . Определить вращающий момент, действующий на данный контур, если он находится в однородном магнитном поле с индукцией B , а силовые линии составляют угол β с нормалью к контуру.

№ вар.	3	8	13	18	23	28	33
a , см	30	8	13	18	23	28	33
N	30	80	130	180	230	280	330
I , А	3	8	1,3	8	5	8	8,3
B , Тл	0,03	0,008	0,013	0,018	0,023	0,028	0,033
β , °	30	40	45	60	30	35	40
μ	1,03	0,98	1,01	1,008	1,007	0,988	0,993

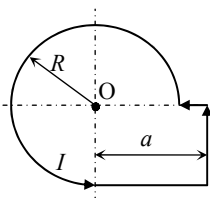
Задачи 222. Варианты: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34



Найти магнитную индукцию, напряженность магнитного поля в точке O контура с током I и его магнитный момент, если число витков N . Определить вращающий момент, действующий на данный контур, если он находится в однородном магнитном поле с индукцией B , а силовые линии составляют угол β с нормалью к контуру. Магнитная проницаемость среды μ

№ вар.	4	9	14	19	24	29	33
I, A	4	9	14	9	4,4	9,2	8,3
N	40	90	140	190	240	290	330
$r, \text{мм}$	40	90	140	100	120	200	230
$a, \text{мм}$	60	110	160	150	140	290	330
μ	1,03	0,97	1,01	1,05	0,99	1,03	0,97
$B, 10^{-3} \text{Тл}$	4	9	14	19	24	29	33
$\beta, ^\circ$	4	9	14	19	24	29	33

Задачи 222. Варианты: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

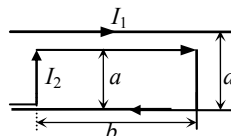


Определить магнитный момент контура с током, магнитную индукцию и напряженность магнитного поля в точке O . Определить вращающий момент, действующий на данный контур, если он находится в однородном магнитном поле с индукцией B , а силовые линии составляют угол β с нормалью к контуру.

№ вар.	5	10	15	20	25	30	35
I, A	5	10	15	6,2	5,5	8,3	9,5
$R, \text{мм}$	50	80	120	160	200	240	280
$a, \text{мм}$	90	160	240	320	400	340	380
μ	1,04	0,98	1,02	0,96	1,02	1,04	0,98
$B, 10^{-3} \text{Тл}$	5	10	15	20	25	30	35
$\beta, ^\circ$	5	10	15	20	25	30	35

Задачи 223. Варианты: 1, 8, 15, 22, 29

В одной плоскости с бесконечно длинным проводником, по которому течет электрический ток I_1 , расположена прямоугольная рамка, по которой идет ток I_2 . Определить силы взаимодействия прямого тока с каждой из сторон рамки, и работу, которую надо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг дальней стороны на угол $\varphi = \pi$. Какое количество электричества протечет через рамку с сопротивлением R при таком повороте без подключения к внешнему источнику?



№ вар.	I_1 , А	I_2 , А	R , Ом	a , см	b , см	d , см
1	10	20	1	10	30	11
8	8	80	0,8	8	28	9
15	15	15	1,5	5	35	6
22	22	44	2	2	22	3
29	29	60	0,6	3	30	4

Задачи 223. Варианты: 2, 9, 16, 23, 30

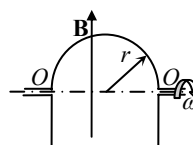
В однородном магнитном поле с напряженностью H , равномерно с частотой ν относительно оси O , параллельной вектору магнитной индукции вращается стержень. Определить разность потенциалов на концах стержня, размеры которого показаны на рисунке. На каком конце стержня избыток электронов?



№ вар.	2	9	16	23	30
H , А/м	2000	1900	1600	2300	3000
ν , Гц	20	9	16	23	15
a , см	2	9	6	4	5
b , см	18	90	80	23	31

Задачи 223. Варианты: 3, 10, 17, 24, 31

Контур с сопротивлением R находится в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} . Верхнюю часть контура – проводник в виде полуокружности радиусом r вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси $O-O$. В момент времени $t = 0$ магнитный поток че-



рез контур минимальный. Найти ЭДС индукции в контуре как функцию времени. В начальный момент времени определить силу, действующую на подвижную часть контура. Пренебрегая магнитным полем индукционного тока, найти среднюю за период вращения тепловую мощность контура.

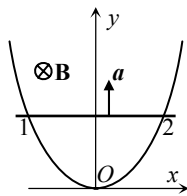
№ вар.	3	10	17	24	31
R , Ом	0,3	1	0,7	0,4	0,2
ω , Гц	300	200	170	240	310
r , см	13	18	17	24	31
B , мТл	30	10	17	24	31

Задачи 223. Варианты: 4, 11, 18, 25, 32

В простейшем масс-спектрометре индукция магнитного поля B (см. пример 3). В ионизаторе образуются ионы, которые ускоряются напряжением U . После поворота в магнитном поле ионы попадают на фотопластинку и вызывают ее почернение. На каком расстоянии от щели будут находиться полосы ионов X , Y ? Какой должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов Y и Z разделились?

№ вар.	4	11	18	25	32
B , Тл	0,14	0,11	0,18	0,15	0,13
U , кВ	15	13	17	25	29
X	$^{10}\text{B}^+$	$^3\text{Li}^+$	$^{13}\text{N}^+$	$^{24}\text{Mg}^+$	$^{58}\text{Ni}^+$
Y	$^{11}\text{C}^+$	$^7\text{Be}^+$	$^{14}\text{N}^+$	$^{27}\text{Al}^+$	$^{63}\text{Cu}^+$
Z	$^{12}\text{C}^+$	$^9\text{Be}^+$	$^{15}\text{N}^+$	$^{28}\text{Si}^+$	$^{65}\text{Cu}^+$

Задачи 223. Варианты: 5, 12, 19, 26, 33

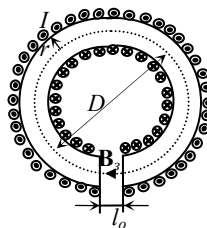


Проводник, имеющий форму параболы $y = kx^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} . Из вершины параболы в момент времени $t = 0$ начали перемещать перемычку 1 – 2 с постоянным ускорением a . Определить ЭДС индукции в образовавшемся контуре как функцию времени и выделившуюся теплоту за первые t секунд. Проводник и перемычка из металла Me с диаметром d .

№ вар.	5	12	19	26	33
$k, \text{м}^{-1}$	3	2,8	2,9	2,6	3,3
$B, \text{мТл}$	30	12	19	26	33
$a, \text{м/с}^2$	3	2,2	1,9	2,6	3,3
Me	Cu	Al	Fe	Cu	Al
$d, \text{мм}$	0,3	0,2	0,19	0,26	0,33

Задачи 223. Варианты: 6, 13, 20, 27, 34

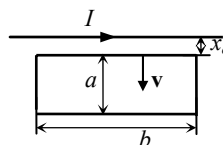
Обмотка тороида, содержащая стальной сердечник с вакуумным зазором длиной l_0 , имеет N витков. Средний диаметр тороида D , радиус поперечного сечения r . Витки из металла Me диаметром d подключены к переменному напряжению, изменяющемуся по закону: $U = U_0 \cos 2\pi\nu t$. Определить максимальную индукцию магнитного поля B_z в зазоре и ЭДС самоиндукции катушки.



№ вар.	6	13	20	27	34
$l_0, \text{мм}$	2,6	2,3	2,0	2,7	3,4
N	600	1200	900	700	800
$D, \text{см}$	36	33	30	27	34
Me	Cu	Al	Fe	Cu	Al
$d, \text{мм}$	0,5	0,2	0,3	0,26	0,34
$U_0, \text{В}$	25	22	24	26	34
$\nu, \text{Гц}$	25	12	19	26	34

Задачи 223. Варианты: 7, 14, 21, 28, 35

Рамку с сопротивлением R поступательно перемещают вниз с постоянной скоростью v от прямолинейного проводника с током I . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x , направление индукционного тока и количество теплоты, выделенное в контуре за первые t секунд.



№ вар.	$I, \text{А}$	$R, \text{Ом}$	$v, \text{м/с}$	$t, \text{с}$	$x_0, \text{см}$	$a, \text{см}$	$b, \text{см}$
7	7	0,7	7	0,7	0,7	7	70
14	14	0,4	14	1,4	1,4	14	74
21	9	0,21	9	2,1	2,1	2	81
28	8	0,28	8	2,8	2,8	8	78
35	5	0,35	5	0,5	0,5	5	75

3 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

3.1 Основные законы и формулы

Многие сложные колебания можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний. **Колебания называются гармоническими, если уравнение движения системы записывается с помощью косинусоидальных или синусоидальных формул:**

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \sin(\omega_0 t + \varphi'_0),$$

где x – значение колеблющейся величины в момент времени t (или смещение от положения равновесия); A – амплитуда колебания, максимальное смещение от положения равновесия, или максимальное значение колеблющейся величины (рис. 3.1); $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебания, аргумент тригонометрической функции в уравнении движения, от значения которого в каждый момент времени зависит значение колеблющейся величины x ; $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – циклическая (круговая) частота собственных колебаний, скорость изменения фазы; $\nu = 1/T$ – частота колебания, число колебаний за одну секунду ($[\omega] = [\nu] = \text{с}^{-1}$ – герц); T – период колебания, время одного полного колебания; φ_0 и φ'_0 – начальная фаза.

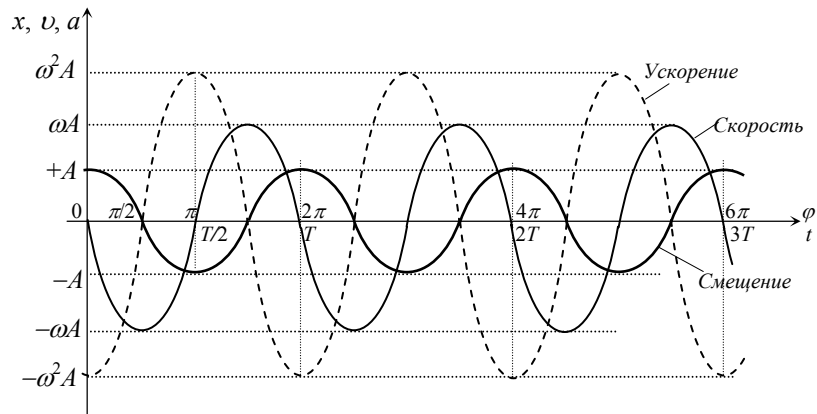


Рис. 3.1. Графики смещения, скорости и ускорения

При гармонических колебаниях:

1) Как смещение x , так и скорость v и ускорение a материальной точки изменяются по гармоническим законам с одинаковыми круговой частотой ω_0 и периодом T :

$$v = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \pi/2 + \varphi_0) = v_m \cos(\omega_0 t + \pi/2 + \varphi_0);$$

$$a = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_m \cos(\omega_0 t + \pi + \varphi_0).$$

2) амплитуды этих колебаний различны: A – у смещения, $v_m = \omega_0 A$ – у скорости и $a_m = \omega_0^2 A$ – у ускорения;

3) фазы колебаний также различны: колебание скорости опережает колебание смещения по фазе на $\pi/2$ (по времени на $T/4$), колебание ускорения опережает колебание смещения по фазе на π (по времени на $T/2$).

Графики зависимостей смещения x , скорости v и ускорения a от времени t и от фазы φ при $\varphi_0 = 0$ показаны на рис. 3.1.

Пусть материальная точка под действием одной возвращающей силы совершает колебания вдоль оси Ox , описываемые уравнением

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}),$$

а при действии другой возвращающей силы – уравнением

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

При одновременном действии этих двух сил результирующее движение является результатом сложения двух колебаний:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \varphi \equiv A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплитуду результирующего движения можно определить по теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Как видно, при постоянстве разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний одинаковой частоты, амплитуда результирующего колебания является постоянной величиной, т.е. результирующее колебание также является гармоническим. Выражение для начальной фазы результирующего колебания:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Два колебательных движения называются когерентными колебаниями, если у них разность фаз с течением времени не меняется.

Разность фаз двух гармонических колебаний:

$$\Delta\varphi = (\omega_{02} - \omega_{01})t + (\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Отсюда видно, что $\Delta\varphi = \text{const}$, если $\omega_{02} = \omega_{01}$. В этом случае разность фаз равняется разности их начальных фаз: $\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01})$.

Пусть

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ тогда } A = A_1 + A_2,$$

т.е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания находятся в одинаковой фазе).

Если $\Delta\varphi = \pm(2k + 1)\pi$, т.е. кратна нечетному числу π , то $A = |A_1 - A_2|$, т.е. результирующая амплитуда равна разности амплитуд складываемых колебаний (колебания происходят в противофазе).

Пусть материальная точка может совершать гармонические колебания как вдоль оси Ox , так и вдоль оси Oy , которые описываются уравнениями

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}).$$

При одновременном действии возвращающих сил, вызывающих колебания материальной точки по соответствующим законам, эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения движения материальной точки в плоскости Oxy . Уравнение траектории результирующего движения можно найти, исключив из этих уравнений параметр – время t :

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

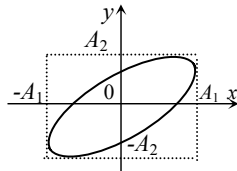


Рис. 3.2

Данное выражение является уравнением эллипса, график которого представлен на рис. 3.2. Материальная точка описывает эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний: $T = 2\pi/\omega$. Ориентация эллипса, а также его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности их начальных фаз ($\varphi_{02} - \varphi_{01}$).

Результаты сложения взаимно перпендикулярных колебаний разных частот: $x = A_1 \cos(k\omega t + \varphi_{01})$; $y = A_2 \cos(n\omega t + \varphi_{02})$, где k, n – целые числа, в виде графиков показаны на рис. 3.3. Замкнутые траек-

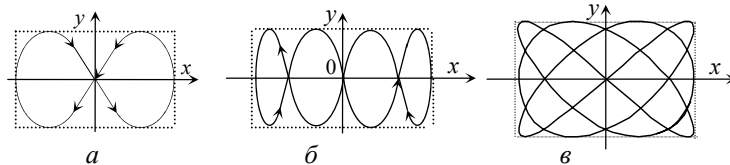


Рис. 3.3. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний разной частоты.

тории движения точки называются *фигурами Лиссажу*. У фигур, приведенных на данном рисунке, разность фаз $\Delta\varphi = \pi/2$, а отношения n/k соответственно равны: 2 (рис. 3.3а); 4 (рис. 3.3б); 4/3 (рис. 3.3в).

По второму закону Ньютона $F = ma$, где m – масса колеблющегося тела (материальной точки).

При гармонических колебаниях ускорение изменяется по закону

$$a = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x.$$

Тогда формула второго закона Ньютона:

$$F = -m \omega_0^2 x.$$

Величину $k = m \omega_0^2$ назовем коэффициентом *квазиупругости*.

Формула для результирующей силы при гармонических колебаниях приобретает вид

$$F = -k x.$$

Данное выражение называется уравнением динамики гармонических колебаний. Следовательно, **при гармонических колебаниях возвращающая сила пропорциональна смещению точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону** (к положению равновесия). Справедливо и обратное утверждение: если результирующая внутренних сил системы удовлетворяет данному условию, значит, система совершает гармонические колебания.

Поскольку ускорение является второй производной от смещения по времени $a = d^2x/dt^2$, а результирующая сила определяется уравнением динамики, то можем записать

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k x.$$

Преобразуя это уравнение, его можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением незатухающих колебаний или дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Колеблющаяся система, движение которой описывается таким уравнением, называется *гармоническим осциллятором*.

Очевидно, решением дифференциального уравнения гармонических колебаний является алгебраическое уравнение таких колебаний: $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $A = x_0$, $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$. В этом легко убедиться простой подстановкой.

Пружинный маятник. Небольшой груз массой m , прикрепленный к абсолютно упругой пружине и совершающий колебания под действием силы упругости при отсутствии сил трения, называется пружинным маятником (рис. 3.4).

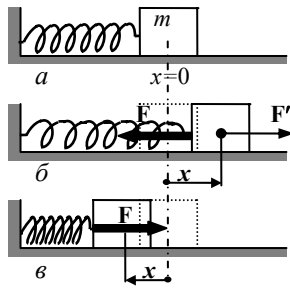


Рис. 3.4

Сила упругости прямо пропорциональна абсолютной деформации:

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент упругости, в случае пружины называемой *жесткостью*. Знак « $-$ » означает, что возвращающая сила F всегда противоположна по направлению смещению x .

Закон Гука, определяющий силу упругости пружины, по внешнему виду совпадает с уравнением динамики гармонических колебаний. Поэтому можно утверждать, что при отсутствии сил трения пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Если отсчет времени начинать, когда груз находится в крайнем правом положении, то начальная фаза $\varphi_0 = 0$.

Физический маятник. Твердое тело, которое может совершать колебания под действием своей силы тяжести F относительно горизонтальной оси O (оси качения), не проходящей через центр инерции C , называется физическим маятником (рис. 3.5).

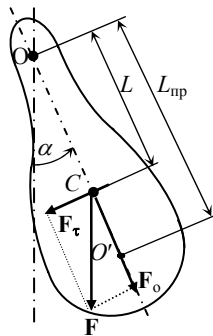


Рис. 3.5

Точка O пересечения оси качения маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр инерции и перпендикулярной оси качения, называется *точкой подвеса* маятника.

Если маятник отклонить от положения равновесия на угол α , то тангенциальная составляющая силы тяжести $F_\tau = -mg \sin \alpha$ создает вращающий момент

$$M = -mgL \sin \alpha,$$

где знак минус показывает, что направление действия вращающего момента противоположно направлению отклонения α .

Второй закон Ньютона при вращательном движении имеет вид

$$M = J\beta,$$

где J – момент инерции маятника относительно оси качения; β – угловое ускорение, равное второй производной от угла поворота по времени, $\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

С учетом выражения для вращающего момента уравнение закона динамики можно представить в виде

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgL \sin\alpha.$$

При малых углах отклонения α значение $\sin\alpha$ можно заменить значением угла α , выраженного в радианах: $\sin\alpha \approx \alpha$. Поэтому уравнение динамики при отсутствии сил трения можно записать в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J} \alpha = 0.$$

Циклическая частота ω_0 и период колебания T определяются по формулам

$$\omega_0 = \sqrt{mgL/J}, \quad T = 2\pi\sqrt{J/(mgL)}.$$

Математический маятник. Идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой и невесомой нити, совершающей колебания под действием силы тяжести \mathbf{F} , называется математическим маятником (рис. 3.6).

Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, когда вся масса сосредоточена в одной точке – в центре масс. В этом случае момент инерции определяется выражением $J = ml^2$, где l – длина маятника.

Подставив данное выражение в формулу для периода колебания физического маятника, получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Потенциальная энергия при гармонических колебаниях:

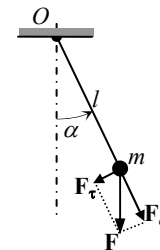


Рис. 3.6

$$W_{\text{п}} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2 \varphi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} (1 + \cos 2\varphi).$$

Скорость тела изменяется по закону $v = -\omega_0 A \sin \varphi$, поэтому формула для кинетической энергии при гармонических колебаниях:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2 \varphi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} (1 - \cos 2\varphi).$$

Из полученных формул следует, что потенциальная и кинетическая энергии гармонического осциллятора изменяются с частотой $2\omega_0$, т.е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонических колебаний.

Полная механическая энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

Полная механическая энергия гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и равняется максимальным значениям кинетической и потенциальной энергии: $W = W_m$.

В случае гармонических колебаний трение отсутствует, поэтому полная механическая энергия сохраняется. Происходят периодические взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий.

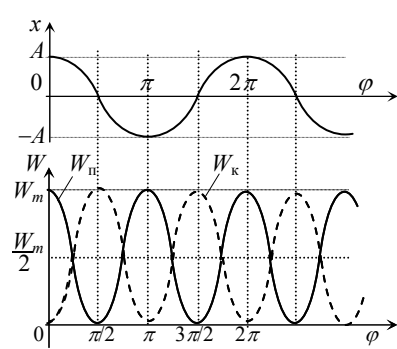


Рис. 3.7

закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2.$$

В реальных системах всегда присутствуют силы трения. Поэтому часть энергии системы затрачивается на возбуждение в окружающей

Графики изменения смещения, потенциальной и кинетической энергий в зависимости от фазы колебания представлены на рис. 3.7. В крайних точках скорость равна нулю и вся энергия состоит из потенциальной энергии:

$$W = kA^2/2.$$

В положении равновесия ($x = 0$) вся энергия переходит в кинетическую:

$$W = m v_m^2 / 2.$$

В промежуточных точках исходя из

среде упругих волн, а также на работу против сил трения и превращается в теплоту. **Амплитуда колебаний реальных систем со временем уменьшается, и такие колебания называются затухающими.**

При небольших скоростях движения сила трения обычно пропорциональна скорости движения и направлена в противоположную сторону:

$$F_{\text{тр}} = -r v = -r \frac{dx}{dt},$$

где r – коэффициент трения, зависящий от свойств среды, формы и размеров движущегося тела.

Имея в виду, что результирующая внутренних сил колеблющейся системы удовлетворяет закону $F = -kx$, и с учетом силы трения второй закон Ньютона можно записать в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Введем величину $\delta = r/(2m)$, которую назовем *коэффициентом затухания*. Учитывая, что $k/m = \omega_0^2$, данное уравнение можно представить в каноническом виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Если коэффициент затухания δ мал, то зависимость смещения x от времени при затухающих колебаниях имеет вид, представленный на рис. 3.8. Эта зависимость выглядит как график косинуса, умноженный на некоторую функцию A , которая убывает со временем (график этой функции показан на рисунке штриховыми линиями). Такой функцией является, например, $A = A_0 e^{-\delta t}$, которую назовем *амплитудой затухающих колебаний*, где A_0 – начальная амплитуда. Поэтому решение дифференциального уравнения затухающих колебаний можно искать в виде

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Подставив данное выражение в дифференциальное уравнение, можно убедиться, что оно удовлетворяет этому уравнению, если

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

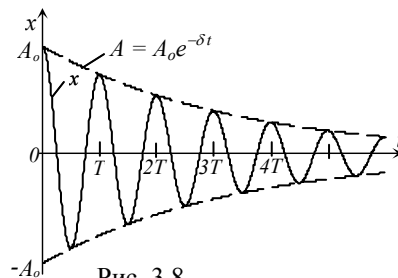


Рис. 3.8

Рис. 7.15.

Промежуток времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется *временем релаксации*.

Можно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами) колеблющейся величины, которую можно определить по формуле

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Отношение амплитуды колебаний в данный момент времени $A(t)$ к амплитуде через период колебаний $A(t+T)$ называется *декрементом затухания*:

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta t} e^{-\delta T}} = e^{\delta T}.$$

Логарифм этой величины называется *логарифмическим декрементом затухания* λ :

$$\lambda = \ln(D) = \delta T = T/\tau = 1/N_e,$$

где N_e – число колебаний, совершаемых за время τ ($\tau = 1/\delta$ – *время релаксации*) уменьшения амплитуды колебаний в e раз.

Для характеристики колебательного контура пользуются понятием *добротности* Q , которая равна произведению 2π на отношение энергии системы $W(t)$ в данный момент времени к уменьшению этой энергии за один период. Учитывая, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, получим

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t)-W(t+T)} = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t)-A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\lambda}}.$$

При малых значениях λ ($\lambda \ll 1$) $1 - e^{-2\lambda} \approx 2\lambda$ и добротность составляет

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e.$$

Добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

Для обеспечения незатухающих колебаний реальной системы на нее необходимо воздействовать периодически изменяющейся внешней силой, чтобы компенсировать потери энергии. **Незатухающие колебания, возникающие под действием переменной силы (вынуждающей силы $F_{\text{вын}}$), называются вынужденными колебаниями.**

Пусть вынуждающая сила изменяется по закону

$$F_{\text{вын}} = F_0 \cos(\Omega t),$$

где F_o – амплитуда вынуждающей силы. В этом случае уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_o}{m} \cos(\Omega t).$$

Данное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Пренебрегая собственными колебаниями системы, играющими существенную роль лишь в самом начале процесса, решение можно искать в виде

$$x = A \cos(\Omega t + \phi)$$

с неизвестными заранее амплитудой A и сдвигом по фазе ϕ . Подставив данную функцию в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, получим два уравнения, из которых находятся искомые величины:

$$A = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \text{ – амплитуда,}$$

$$\text{tg}\phi = \frac{2\delta\cdot\Omega}{\Omega^2 - \omega_o^2} \text{ – тангенс сдвига по фазе.}$$

Когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы, амплитуда резко возрастает, если только затухание не слишком велико. **Резкое увеличение амплитуды вынужденных механических колебаний при приближении частоты вынужденных колебаний к резонансной частоте Ω_p называется резонансом.** Резонанс наступает при частоте

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_o^2 - 2\delta^2}.$$

При $\delta = 0$ $\Omega_p = \omega_o$. Приведенная совокупность кривых называется **резонансными кривыми** (рис. 3.9).

Высота и ширина резонансного пика характеризуется **добротностью**

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}{2\delta} \approx \frac{\omega_o}{2\delta}.$$

Чем меньше коэффициент затухания δ , тем больше Q и тем выше резонансный пик. Значение Q характеризует также ширину резонансного пика: если Ω_1 и Ω_2 – частоты, на которых квадрат амплитуды A составляет поло-

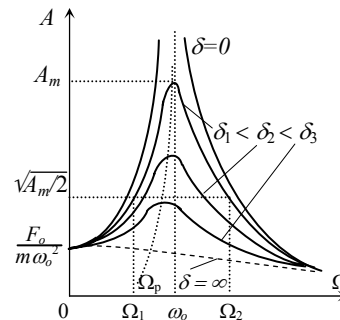


Рис. 3.9

вину максимального значения A_m , то *ширина* резонансного пика $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ связана с добротностью контура соотношением

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Важное значение в физике и радиотехнике имеют *электромагнитные колебания*, при которых заряды, токи и напряжения периодически изменяются и которые приводят к взаимным превращениям электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** – электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора C , катушки индуктивности L и сопротивления R (рис. 3.10).

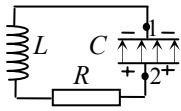


Рис. 3.10

Пусть конденсатор предварительно зарядили от внешнего источника так, что на одной из обкладок имеется заряд $+q_0$, а на другой – заряд $-q_0$. При этом между обкладками конденсатора образуется электрическое поле с энергией

$$W_E = CU_0^2/2,$$

где U_0 – максимальная разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Если контур замкнуть, то избыточные электроны через катушку индуктивности и резистор начнут переходить из верхней обкладки на нижнюю, т.е. конденсатор начнет разряжаться. По мере разрядки конденсатора ток в катушке индуктивности по величине возрастает и в ней индуцируется ЭДС самоиндукции:

$$J_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

К четверти периода конденсатор полностью разряжается, напряжение уменьшается до нуля, и энергия электрического поля конденсатора при $R = 0$ полностью переходит в энергию магнитного поля катушки индуктивности:

$$W_m = LI_0^2/2.$$

В этот момент ток в контуре достигает своего максимального значения $I = I_0$.

Закон Ома для рассмотренного контура имеет вид

$$U + J_{si} = IR,$$

где R – активное сопротивление цепи; $U = \varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора в произвольный момент времени.

Сила *квазистационарного* тока в цепи равняется скорости изменения заряда конденсатора:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Поэтому закон Ома можно записать в виде

$$-\frac{q}{C} - L \frac{d^2q}{dt^2} = R \frac{dq}{dt}.$$

После несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Данное уравнение является уравнением затухающих колебаний. При этом коэффициент затухания определяется выражением

$$\delta = \frac{R}{2L},$$

а циклическая частота собственных колебаний находится из формулы

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

За счет периодических перезарядок конденсатора в колебательном контуре возникает переменный электрический ток высокой частоты. При этом между обкладками конденсатора образуется переменное электрическое поле, а около катушки индуктивности – переменное магнитное поле. **Явление образования в колебательном контуре переменного электрического и магнитного полей называется электромагнитными колебаниями.**

В рассматриваемом контуре внешние источники ЭДС отсутствуют. Колебания, протекающие в таком контуре, будут *свободными затухающими колебаниями*. Если активное сопротивление контура $R = 0$, то такой контур называется *идеальным колебательным контуром*. Дифференциальное уравнение для идеального контура

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний, и в идеальном контуре заряд изменяется по гармоническому закону

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_0 – амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой ω_0 , называемой *собственной частотой контура* и определяется формулой Томсона:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Период и частота колебаний в идеальном контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \nu = 1/[2\pi\sqrt{LC}].$$

Напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в идеальном контуре также меняются по гармоническим законам:

$$U_c = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2 + \varphi_0),$$

где $U_0 = q_0/C$ – амплитуда напряжения; $I_0 = \omega_0 q_0$ – амплитуда силы тока.

В реальном колебательном контуре за счет потери энергии на омическом сопротивлении колебания будут затухающими:

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$U_c = U_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$I = I_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \pi/2 + \varphi_0),$$

где циклическая частота колебаний определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Чтобы в колебательном контуре колебания были незатухающими и в установившемся режиме колебания силы тока происходили по гармоническому закону

$$I = I_0 \cos(\Omega t - \phi),$$

в контур необходимо подводить переменную ЭДС от внешнего источника (рис. 3.11). Пусть вынуждающая ЭДС изменяется по закону

$$J = J_0 \cos \Omega t,$$

где J_0, Ω – амплитуда и циклическая частота колебаний ЭДС внешнего источника.

В этом случае дифференциальное уравнение для изменения заряда на обкладках конденсатора примет вид

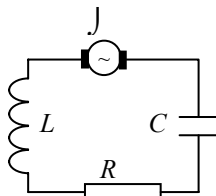


Рис. 3.11

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_o}{L} \cos \Omega t$$

Амплитуда силы тока при вынужденных колебаниях в контуре

$$I_o = \Omega q_o = \frac{\mathcal{E}_o}{\sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2}}.$$

Сдвиг по фазе ϕ между током и приложенным внешним напряжением определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}.$$

Графики зависимостей амплитуды силы тока I_o от циклической частоты внешнего источника ЭДС при различных значениях активного сопротивления контура называются *резонансными кривыми колебательного контура* (рис. 3.12). **Резкое увеличение амплитуды силы тока при совпадении частоты вынужденных колебаний Ω с собственной частотой колебаний контура ω_0 называется резонансом в колебательном контуре.** Графики зависимостей сдвига по фазе между током и напряжением ϕ от частоты Ω показаны на рис.3.13. Резонансная частота Ω_p , соответствующая максимуму амплитуды тока в колебательном контуре при вынужденных колебаниях, не зависит от R :

$$\Omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

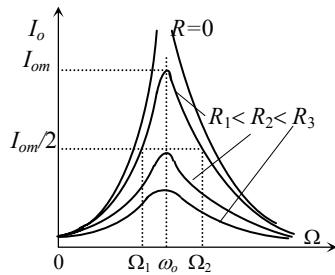


Рис. 3.12

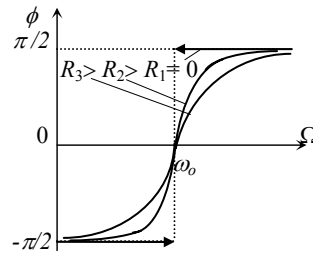


Рис. 3.13

При резонансе амплитуда силы тока достигает максимального значения $I_{om} = \mathcal{E}_o/R$, а сдвиг фаз между силой тока и ЭДС внешнего источника равняется нулю, т.е. $\phi = 0$. Если $\Omega < \omega_0$, то $\phi < 0$, т.е. сила тока опережает ЭДС по фазе ($\phi = -\pi/2$ при $\Omega = 0$). Если $\Omega > \omega_0$, то

$\phi > 0$, т.е. сила тока отстает по фазе от ЭДС и чем больше Ω , тем сильнее ($\phi \rightarrow \pi/2$ при $\Omega \rightarrow \infty$).

Процесс распространения колебаний в сплошной среде является волновым процессом (или *волной*). Упругими волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Распространение колебаний означает передачу колебаний от одних частиц к другим за счет того, что смежные участки среды связаны между собой. В *продольных волнах* частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в *поперечных* – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

При распространении колебаний частицы среды колеблются около своих положений равновесия и не движутся вместе с волной. Однако при передаче колебательного движения от одних частиц к другим передается энергия движения. Поэтому при распространении волны происходит перенос энергии без переноса вещества. Такие волны в отличие от стоячих волн называют *бегущими волнами*.

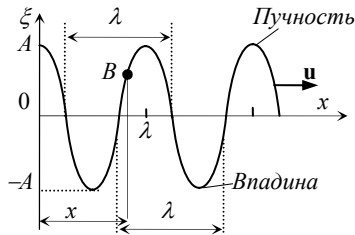


Рис. 3.14

На рис.3.14 показаны основные параметры, используемые для характеристики периодической синусоидальной бегущей волны. Высшие точки волнового движения называются *пучностями*, а низшие – *впадинами*. Амплитуда волны – это максимальная высота или глубина впадины, измеренная относительно нулевого уровня (или положения равновесия). Смещение частиц среды ξ (например, частицы B) изменяется с расстоянием x этих частиц от источника колебаний 0 . График волны (функции $\xi(x,t)$) дает зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени.

Расстояние между двумя соседними пучностями (между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе) называется *длиной волны* λ . Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *волновым фронтом*. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Если волновые поверхности представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, то волна называется *плоской волной*. *Скоростью волны* u (фазовой скоростью) называется скорость, с которой перемещается гребень волны, а также фронт волны и волновые поверхности. Длина волны равняется тому расстоянию, на которое распространяется волновая поверхность за один период, т.е. $\lambda = uT$. *Частотой волны* ν называется число греб-

ней (полных колебаний), проходящих через данную точку за единицу времени. Учитывая, что $\nu = 1/T$, $u = \lambda \nu$.

Уравнение плоской волны определяет зависимость между смещением ξ частиц среды, распространяющихся со скоростью u вдоль направления x , и расстоянием x от этих частиц от источника колебаний в момент времени t . Надо иметь в виду, что скорости колебаний самих частиц среды \mathbf{v} направлены перпендикулярно скорости распространения волны \mathbf{u} . Пусть некоторая частица среды B находится от источника колебаний θ на расстоянии x (рис. 3.15). Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, происходят по гармоническому закону

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

то такие колебания до точки B дойдут через время $\tau = x/u$. Колебания частиц среды B будут отставать по времени от колебаний источника на время τ и будут происходить по закону, который называется *уравнением бегущей волны*:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - x/u) + \varphi_0) = A \cos(\omega t - \frac{\omega}{u} x + \varphi_0) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где A – амплитуда; ω – циклическая частота волны; $\varphi = \omega(t - x/u) + \varphi_0 = (\omega t - kx + \varphi_0)$ – фаза плоской волны; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Например, если положения различных частиц среды в момент времени $t = 0$ показаны сплошной линией, то через время t в таком положении окажутся частицы, которые показаны штриховой линией. В момент времени t частица B окажется в положении B' .

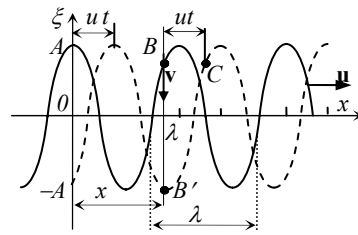


Рис. 3.14

Для характеристики волн используется *волновое число*

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Для выполнения математических преобразований удобно бывает представлять колеблющуюся величину комплексным числом $\tilde{\xi}$. Согласно формуле Эйлера, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Поэтому уравнение плоской волны можно записать в экспоненциальной форме:

$$\tilde{\xi} = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}.$$

3.2 Примеры решения и оформления задач

Пример 1. Частица массой $m = 5$ г совершает колебания вдоль оси x , описываемые уравнением $x = 0,05\sin(4\pi t - \pi/4)$. Найти амплитуду, частоту и период колебания. Определить скорость, ускорение, кинетическую и потенциальную энергии частицы в момент времени $t = T/2$. Построить графики зависимостей смещения частицы, ее скорости и ускорения в зависимости от времени.

<p><i>Дано:</i></p> $x = 0,05\sin(4\pi t - \pi/4)$ $m = 5 \text{ г} = 0,005 \text{ кг}$ $t = T/2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $A, \nu, \varphi_0, T, v, a, W_k,$ $W_n, x = f(t), v = f(t),$ $a = f(t).$	<p><i>Анализ:</i></p> <p>Уравнение движения частицы является уравнением гармонических колебаний, записанным в синусоидальной форме. Стандартная форма записи уравнения гармонических колебаний имеет вид</p> $x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$
--	---

Сопоставляя его с заданным уравнением колебаний можно определить, что амплитуда колебаний $A = 0,05$ м, циклическая частота $\omega = 4\pi$. Частота колебания: $\nu = \omega/2\pi = 2 \text{ с}^{-1}$. Период колебания: $T = 1/\nu$. Для уравнения колебания в исходном виде начальная фаза: $\varphi'_0 = -\pi/4$. Так как $\cos\alpha = \sin(\alpha - \pi/2)$, если уравнение колебаний записать в косинусоидальной форме, то начальная фаза колебаний $-\varphi_0 = -3\pi/4$, и уравнение колебаний частицы приобретает вид

$$x = 0,05 \cos(4\pi t - 3\pi/4).$$

Скорость определяем как производную от смещения по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,2\pi \cos(4\pi t - \pi/4).$$

Ускорение определяем как производную от скорости:

$$a = \frac{dv}{dt} = -0,8\pi^2 \sin(4\pi t - \pi/4) = 0,8\pi^2 \cos(4\pi t + \pi/4).$$

Кинетическая энергия частицы:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = 0,02\pi^2 m \cos^2(4\pi t - \pi/4).$$

Потенциальная энергия:

$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = 0,02\pi^2 m \sin^2(4\pi t - \pi/4),$$

где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент квазиупругости.

Решение:

Период колебаний: $T = 1/\nu = 1/2 = 0,5$ с.

Момент времени, для которого по условиям задачи необходимо вычислить искомые величины: $t = T/2 = 0,5/2 = 0,25$ с.

$$v = 0,2 \pi \cos(4\pi t - \pi/4) = 0,2 \pi \cos(4\pi \cdot 0,25 - \pi/4) = 0,44429 \text{ м/с.}$$

$$a = 0,8 \pi^2 \cos(4\pi t + \pi/4) = 0,8 \pi^2 \cos(4\pi \cdot 0,25 + \pi/4) = -5,5831 \text{ м/с}^2.$$

$$W_k = 0,02 \pi^2 \cdot 0,005 \cos^2(4\pi t - \pi/4) = 0,02 \pi^2 \cdot 0,005 \cos^2(4\pi \cdot 0,25 - \pi/4) = 4,9348 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

$$W_n = 0,02 \pi^2 \cdot 0,005 \sin^2(4\pi t - \pi/4) = 0,02 \pi^2 \cdot 0,005 \sin^2(4\pi \cdot 0,25 - \pi/4) = 4,9348 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Для построения графиков вычислим значения смещения частицы x , скорости v и ускорения a для различных моментов времени с шагом $\Delta t = T/8 = 0,0625$ с в пределах одного периода $T = 0,5$ с и результаты занесем в таблицу:

$t, \text{ с}$	0	0,0625	0,125	0,187	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
$x, \text{ см}$	-3,535	0	3,5355	5	3,5355	0	-3,535	-5	-3,535
$v, \text{ м/с}$	0,4427	0,6289	0,4427	0	-0,443	-0,629	-0,443	0	0,4427
$a, \text{ м/с}^2$	5,5828	0	-5,583	-7,895	-5,583	0	5,583	7,895	5,5828

Как и следовало ожидать, численные значения вычисленных величин повторяются через определенные промежутки времени.

Ответ:

Амплитуда колебаний: $A = 0,05$ м.

Циклическая частота: $\omega_0 = 4\pi \text{ с}^{-1}$ (Гц). Частота колебаний: $\nu = 2$ Гц.

Период колебаний: $T = 0,5$ с.

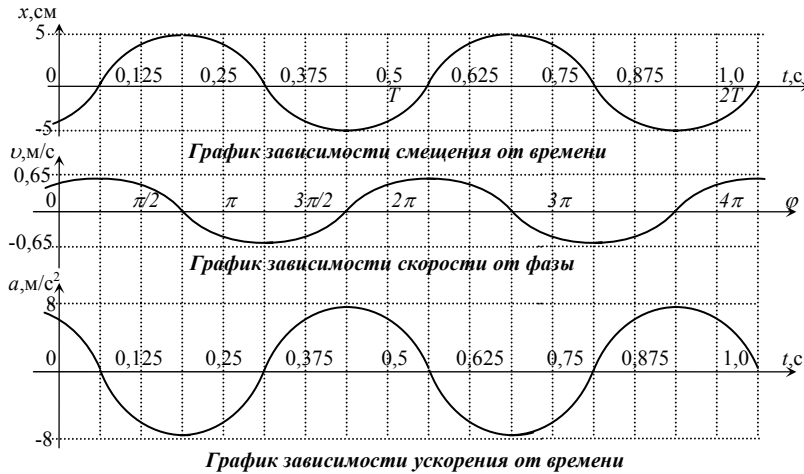
Скорость материальной точки: $v = 0,44429$ м/с.

Ускорение материальной точки: $a = -5,5831 \text{ м/с}^2$.

Кинетическая энергия: $W_k = 4,9348 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Потенциальная энергия: $W_n = 4,9348 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Ниже приведены графики зависимостей смещения частицы от положения равновесия; ее скорости и ускорения от времени и фазы.

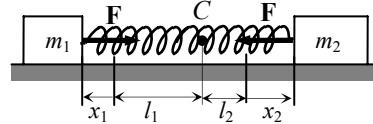


Пример 2: На противоположных концах пружины укреплены два небольших тела с массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 100$ г. Пружину растягивают и оба тела одновременно отпускают. Каким будет период колебаний, если коэффициент упругости пружины $k = 5,26$ Н/м?

Дано:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,05 \text{ кг} \\ m_2 &= 0,1 \text{ кг} \\ k &= 5,26 \text{ Н/м} \\ T & \end{aligned}$$

Анализ:



Так как в условии задачи масса пружины не дается, то будем считать, что она намного меньше, чем массы грузов. Силу

трения также учитывать не будем. У изолированной системы, состоящей из двух тел и невесомой пружины, положение центра инерции C с течением времени не изменится. Пусть x_1 – смещение тела m_1 от положения равновесия, x_2 – такое же смещение тела m_2 . Начало отсчета совместим с центром масс. Тогда для нерастянутой пружины из формулы для радиус-вектора центра инерции получим: $m_1 l_1 = -m_2 l_2$. При растянутой пружине

$$m_1 (l_1 + x_1) = -m_2 (l_2 + x_2).$$

Из второго уравнения вычтем первое:

$$m_1 x_1 = -m_2 x_2 \quad \text{или} \quad x_1 = -(m_2/m_1)x_2.$$

Силы, действующие на оба тела, будут одинаковыми:

$$F = -k(x_2 - x_1),$$

где x_1 и x_2 – алгебраические величины.

Второй закон Ньютона для второго груза имеет вид

$$F = m_2 a \quad \text{или} \quad -k(x_2 - x_1) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}.$$

Подставим в левую часть последнего уравнения $-(m_2/m_1)x_2$ вместо x_1 :

$$-k\left[x_2 + \frac{m_2}{m_1}x_2\right] = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение колебаний для второго тела:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} x_2 = 0.$$

Данное уравнение совпадает с уравнением гармонического осциллятора, если

$$\omega_0 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Откуда период колебаний системы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Анализ размерности:

$$[T] = \left(\frac{[m]^2}{[k][m]} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{кг}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг}^2} \right)^{1/2} = \text{с}.$$

Решение:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,1}{5,26 \cdot (0,05 + 0,1)}} = 0,5 \text{ с}.$$

Ответ:

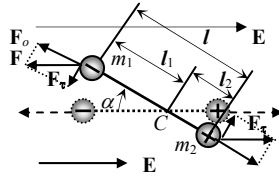
Период колебаний системы, состоящей из пружины и прикрепленных к двум ее концам грузов, $T = 0,5$ с.

Пример 3. Определить период колебаний полярной молекулы, состоящей из двух ионов – отрицательного с $m_1 = 5,9 \cdot 10^{-26}$ кг и положительного с $m_2 = 6,5 \cdot 10^{-26}$ кг. Центры инерции ионов находятся на расстоянии $l = 10^{-10}$ м, а заряды ионов равны по величине элементарному

заряду $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, и молекула находится в электростатическом поле напряженностью $E = 5 \cdot 10^4$ В/м.

Дано:

$$\begin{array}{l} m_1 = 5,9 \cdot 10^{-26} \text{ кг} \\ m_2 = 6,5 \cdot 10^{-26} \text{ кг} \\ l = 10^{-10} \text{ м} \\ q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ E = 5 \text{ В/м} \\ \hline T \end{array}$$



Анализ:

Молекулу условно можно представить в виде двух заряженных материальных точек с жесткой связью. В положении устойчивого равновесия молекула располагается вдоль силовых линий поля \mathbf{E} . Если ее вы-

вести из этого состояния, то возникают тангенциальные составляющие сил $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, действующих на отдельные ионы:

$$F_\tau = -qE \sin \alpha,$$

где знак « \rightarrow » указывает на то, что направление возвращающей силы имеет противоположное направление углу отклонения α .

Под действием возвращающей силы молекула начнет колебаться относительно центра инерции C . Второй закон Ньютона при вращательном движении для молекулы запишется в виде

$$M = J\beta, \text{ или } J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -qE \sin \alpha l,$$

где $M = -qE \sin \alpha l$ – момент пары сил, действующих на ионы противоположного знака; $\beta = d^2\alpha/dt^2$ – угловое ускорение молекулы. Момент инерции J молекулы относительно центра инерции можно определить как сумму моментов инерций двух материальных точек:

$$J = J_1 + J_2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2.$$

Расстояния l_1 и l_2 от центров инерций отдельных ионов до общего центра инерции всей молекулы связаны соотношением

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \text{ или } m_1 l_1 = m_2 l_2 / m_1.$$

Так как $l_1 + l_2 = l$, то, используя эти соотношения, можно выразить:

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Поэтому формула для момента инерции молекулы примет вид

$$J = \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l^2 + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} l^2 = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} l^2.$$

С учетом данного выражения из второго закона Ньютона можно получить дифференциальное уравнение колебаний молекулы:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{(m_1+m_2)^2 qE}{(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) l} \sin\alpha = 0.$$

При малых углах отклонения $\sin\alpha = \alpha$ и данное уравнение совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_o^2 = \frac{(m_1+m_2)^2 qE}{(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) l}.$$

Поэтому период колебаний молекулы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{m_1+m_2} \sqrt{\frac{(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) l}{qE}}.$$

Анализ размерности:

$$[T] = \frac{1}{[m]} \left(\frac{[m]^3 [l]}{[q][E]} \right)^{1/2} = \frac{1}{\text{кг}} \left(\frac{\text{кг}^3 \text{м}}{\text{Кл} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} / (\text{с}^2 \cdot \text{Кл})} \right)^{1/2} = \text{с}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{m_1+m_2} \sqrt{\frac{(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) l}{qE}} = \\ &= \frac{2\pi}{(5,9+6,5) \cdot 10^{-26}} \sqrt{\frac{(5,9 \cdot 6,5^2 + 6,5 \cdot 5,9^2) \cdot 10^{-88}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^4}} = 1,235 \cdot 10^{-10} \text{ с}. \end{aligned}$$

Ответ:

Период свободных колебаний полярной молекулы в электростатическом поле $T = 1,235 \cdot 10^{-10}$ с.

Пример 4. В колебательный контур с активным сопротивлением $R = 3$ Ом, индуктивностью $L = 1$ мГ включен источник переменной ЭДС $J = J_o \cos \Omega t$, где $J_o = 2$ В. Определить емкость конденсатора, а также резонансные амплитуды напряжений на сопротивлении, конденсаторе и на катушке индуктивности, если резонансная частота $\nu_p = 10^5$ Гц. Какая максимальная энергия накапливается в конденсаторе и в катушке? На какую частоту настроен контур?

Дано:

$$R = 3 \text{ Ом}$$

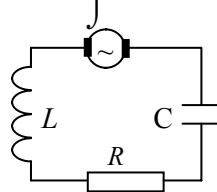
$$L = 1 \text{ мГ}$$

$$J_o = 2 \text{ В}$$

$$\nu_p = 10^5 \text{ Гц}$$

$$C, U_{Ro}, U_{Co}, U_{Lo},$$

$$W_{Co}, W_{Lo}, \lambda$$



Анализ:

При наличии внешнего переменного источника тока колебания в контуре будут вынужденными. Так как ЭДС генератора переменного тока изменяется по гармоническому закону $J = J_o \cos \Omega t$, то при установившихся вынужденных

колебаниях заряд конденсатора изменяется по такому же закону с циклической частотой источника тока Ω

$$q = q_o \cos(\Omega t + \phi_o).$$

Амплитуда изменения заряда q_o и сдвиг фазы ϕ_o находятся по формулам:

$$q_o = J_o / \{ L \sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2} \} = J_o / \{ \Omega \sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2} \}.$$

$$\text{tg} \phi_o = - \frac{2\delta \Omega}{\omega_o^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\Omega L - 1/(\Omega C)}.$$

При преобразовании этих формул учли, что собственная частота колебаний контура $\omega_o^2 = 1/(LC)$ и коэффициент затухания $\delta = R/(2L)$.

Сила установившегося тока равняется скорости изменения заряда:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_o \Omega \sin(\Omega t + \phi_o) = I_o \cos(\omega t - \phi).$$

$$\text{Амплитуда тока: } I_o = q_o \Omega = J_o / \sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2};$$

$$\text{tg} \phi = \text{ctg} \phi_o = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}.$$

Величина $X_L = \Omega L$ называется индуктивным сопротивлением, $X_C = 1/(\Omega C)$ – емкостным сопротивлением, а $X = X_L - X_C = \Omega L - 1/(\Omega C)$ – реактивным сопротивлением. Как видно из полученной формулы для I_o , амплитуда тока в контуре достигает максимального значения, когда реактивное сопротивление равняется нулю:

$$X = \Omega L - 1/(\Omega C) = \Omega_p L - 1/(\Omega_p C) = 0.$$

Поэтому резонансная циклическая частота в контуре не зависит от активного сопротивления R : $\Omega_p = 1/\sqrt{LC}$ и равняется собственной

частоте колебательного контура – ω_0 . Из равенства нулю реактивного сопротивления при резонансе следует:

$$\Omega_p L = 1/(\Omega_p C).$$

Отсюда емкость конденсатора:

$$C = 1/(\Omega_p^2 L) = 1/(4\pi^2 \nu_p^2 L).$$

Амплитуда силы тока в контуре при резонансе:

$$I_{op} = J_o/R.$$

Сдвиг фаз между током и ЭДС: $\phi(\Omega_p) = 0$.

Напряжение на обкладках конденсатора:

$$U_C = q/C = U_{Co} \cos(\Omega t - \varphi - \pi/2) = U_{Co} \cos(\Omega_p t - \pi/2).$$

Напряжение на активном сопротивлении:

$$U_R = IR = U_{Ro} \cos(\Omega t - \varphi) = U_{Ro} \cos \Omega_p t.$$

Напряжение на катушке определяется величиной ЭДС самоиндукции:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = U_{Lo} \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2) = U_{Lo} \cos(\Omega_p t + \pi/2).$$

Можно заметить, что напряжение на катушке опережает по фазе напряжение на сопротивлении на $\pi/2$, а напряжение на конденсаторе отстает на $\pi/2$. Амплитудные значения напряжений U_{Co} , U_{Ro} , U_{Lo} соответственно равны:

$$U_{Co} = q_o/C = I_o/(\Omega C), U_{Ro} = I_o R, U_{Lo} = \Omega I_o L.$$

При резонансе

$$U_{Ro} = J_o, U_{Co} = U_{Lo} = J_o \sqrt{\frac{L}{C}}/R.$$

Можно показать, что при резонансе отношение амплитуды напряжения на конденсаторе (катушке) к ЭДС внешнего источника равняется отношению емкостного (индуктивного) сопротивления к активному сопротивлению:

$$U_{Co}/J_o = I_{op}/(J_o \Omega C) = J_o/(J_o \Omega CR) = X_C/R.$$

Максимальная энергия конденсатора и катушки индуктивности:

$$W_{Co} = \frac{CU_{Co}^2}{2}; W_{Lo} = \frac{LI_{op}^2}{2}.$$

Длина волны, на которую настроен контур:

$$\lambda = c/\nu,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

Анализ размерности:

$$[C] = 1/([\Omega]^2[L]) = \frac{c^2}{\Gamma_H} = \frac{c^2}{B\delta/A} = \frac{c^2 A}{T_L \cdot M^2} = \frac{c^2 A^2}{H \cdot M} = \Phi.$$

$$[U_{Co}] = [q] / [C] = Кл/\Phi = Кл \cdot В/Кл = Кл.$$

$$[U_{Co}] = [U_{Lo}] = [J] \sqrt{\frac{[L]}{[C]}} / [R] = В \sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}} / Ом = \frac{H \cdot M}{Ac} = В.$$

Для энергии используются стандартные формулы. Поэтому

$$[W_C] = [W_L] = Дж.$$

Решение:

$$C = 1 / (4\pi^2 \nu_p^2 L) = 1 / (4\pi^2 10^{10} 10^{-3}) = 2,53 \text{ нФ.}$$

$$U_{Ro} = J_o = 2 \text{ В.}$$

$$U_{Co} = U_{Lo} = J_o \sqrt{\frac{L}{C}} / R = 2 \sqrt{\frac{10^{-3}}{2,53 \cdot 10^{-9}}} / 3 = 419 \text{ В.}$$

$$W_{Co} = \frac{CU_{Co}^2}{2} = \frac{1}{2} 2,53 \cdot 10^{-9} 419^2 = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

$$W_{Lo} = \frac{LI_{op}^2}{2} = L J_o^2 / (2 R^2) = 10^{-3} 2^2 / (2 \cdot 3^2) = 0,222 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^8 / 10^5 = 3 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Ответ:

Емкость конденсатора: $C = 2,53 \text{ нФ.}$

Амплитуда напряжения на сопротивлении: $U_{Ro} = J_o = 2 \text{ В.}$

Амплитуда напряжения на конденсаторе и катушке:

$$U_{Co} = U_{Lo} = 419 \text{ В.}$$

Обратите внимание, во сколько раз это значение больше ЭДС внешнего источника.

Максимальные значения энергии конденсатора и катушки индуктивности равны между собой: $W_{Co} = W_{Lo} = 0,222 \text{ мДж.}$

Длина волны, на которую настроен колебательный контур: $\lambda = 3 \cdot 10^3 \text{ м.}$

Пример 5. Левому концу длинной натянутой струны сообщается простое гармоническое колебание с частотой $\nu = 250 \text{ Гц}$ и амплитудой $A = 2,6 \text{ см}$. Сила натяжения струны $T = 140 \text{ Н}$, а линейная плотность струны $\tau = 0,12 \text{ кг/м}$. В начальный момент времени $t = 0$ конец струны смещен вверх на $\xi = 1,3 \text{ см}$ и движется вверх. Определить длину волны, написать уравнение бегущей волны.

Дано:

$$\begin{array}{l} \nu = 250 \text{ Гц} \\ A = 0,026 \text{ м} \\ T = 140 \text{ Н} \\ \tau = 0,12 \text{ кг/м} \\ \xi_0 = 0,013 \text{ м} \\ \lambda, \xi = \xi(t, x) \end{array}$$

Анализ и решение:

Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, происходят по гармоническому закону

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

то такие колебания до произвольной точки B дойдут через время $\tau = x/u$. Колебания частиц среды B будут отставать по времени от колебаний источника на время τ и будут происходить по закону

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - x/u) + \varphi_0) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где A – амплитуда; ω – циклическая частота волны; $\varphi = \omega(t - x/u) + \varphi_0 = (\omega t - kx + \varphi_0)$ – фаза плоской волны; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Скорость поперечной волны в натянутой струне:

$$u = \sqrt{T/\tau} = \sqrt{140/0,12} = 34 \text{ м/с.}$$

Тогда длина волны:

$$\lambda = u/\nu = 34/250 = 0,14 \text{ м.}$$

Циклическая частота:

$$\omega = 2\pi\nu = 500\pi.$$

Исходя из начальных условий

$$\xi(0, 0) = 0,013 = 0,026 \cos \varphi_0.$$

Отсюда

$$\cos \varphi_0 = 0,013/0,026 = 1/2 \text{ и } \varphi_0 = \arccos 1/2 = \pi/3.$$

Волновое число:

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0,14 = 45 \text{ м}^{-1}.$$

Ответ:

Длина бегущей по натянутой струне волны: $\lambda = 0,14 \text{ м}$.

Уравнение поперечной волны: $\xi(x, t) = 0,026 \cos(500t - 45x + \pi/3)$.

3.3 Задачи для РГР 22 по колебаниям и волнам

Задачи 224. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

Материальная точка массой m совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$. Найти возвращающую силу, кинетическую и потенциальную энергии в момент времени $t = T/n$. Построить графики смещения, скорости и ускорения точки в зависимости от времени.

№ вар.	1	7	13	19	25	31
m , г	6	7	13	9	8	4
A , см	1	7	13	19	25	31
ν , Гц	2	6	3	5	5	3
φ_0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/3$
n	$3/2$	2	3	3	5	3

Задачи 224. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

Определить массу материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A , периодом T и начальной фазой φ_0 , если полная энергия колебаний W . Через какой промежуток времени от начала отсчета кинетическая энергия будет равна потенциальной энергии? Построить графики смещения, кинетической и потенциальной энергий в зависимости от времени.

№ вар.	2	8	14	20	26	32
A , см	4	8	14	20	26	32
T , с	0,2	0,8	0,2	0,4	0,6	0,3
φ_0	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/3$
W , мДж	2	8	14	20	26	32

Задачи 224. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x . Циклическая частота ω_0 . В момент времени $t = T/n$ координата частицы x_t и ее скорость v_t . Составить уравнение колебаний. Определить кинетическую и потенциальную энергии в момент времени $t = 3T/n$,

если масса частицы m . Построить графики смещения частицы, скорости и ускорения в зависимости от времени.

№ вар.	3	9	15	21	27	33
ω_0 , Гц	6	9	5	3	7	3
x , см	3	9	5	21	7	3
v , см/с	-3,73	-81	-14,4	-17,4	-49	-3,73
m , г	3	9	15	21	27	33
n	9	18	15	11	17	13

Задачи 224. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Записать уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m при заданных значениях амплитуды A , начальной фазы φ_0 , периода колебаний T . Определить циклическую частоту и частоту колебаний. Построить графики смещения, скорости и ускорения в зависимости от времени. За какое время от начала движения точка проходит путь от положения равновесия до максимального смещения? Найти максимальную силу, действующую на материальную точку, и ее полную энергию.

№ вар.	4	10	16	22	28	34
A , см	4	10	16	22	28	34
T , с	0,4	1	0,6	0,2	0,8	0,4
φ_0	$\pi/4$	π	$\pi/6$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$
m , г	4	10	16	22	28	34

Задачи 224. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29

Материальная точка массой m совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = A \cos[n\pi(t + \alpha)]$.

Определить частоту, циклическую частоту, период колебаний и начальную фазу. Построить графики смещения, кинетической и потенциальной энергии точки в зависимости от времени. За какое время от начала движения точка будет иметь смещение от положения равновесия, равное половине амплитуды; скорость, равную половине максимальной скорости? При каком смещении от положения равновесия

на колеблющуюся точку действует сила, равная половине максимальной? Определите значение этой силы.

№ вар.	5	11	17	23	29
A , см	5	11	17	23	9
n	4	1	7	3	9
α	$\pi/5$	$\pi/2$	$\pi/7$	$\pi/6$	$\pi/8$
m , г	5	11	7	3	9

Задачи 224. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, равна W . Максимальная сила, действующая на материальную точку, равна F_m .

Написать уравнение движения этой точки, если период колебаний T и начальная фаза φ_0 . Построить графики смещения, кинетической и потенциальной энергии в зависимости от времени. Определить максимальные значения скорости и ускорения. За какое время от начала движения точка будет иметь смещение от положения равновесия, равное A/n ?

№ вар.	6	12	18	24	30
W , мкДж	60	120	180	24	30
F , мН	6	12	18	2,4	3
T , с	0,6	1,2	0,8	0,4	0,2
φ_0	$\pi/6$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	π
n	6	3	8	4	3

Задачи 225. Варианты: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

Построить график затухающих колебаний частицы, если начальная амплитуда A_0 , циклическая частота собственных колебаний $\omega_0 = n\pi$, логарифмический декремент затухания λ , начальная фаза равна нулю. Чему равняется кинетическая энергия частицы в момент времени релаксации, если масса m ? График построить для интервала времени от $t = 0$ до $t = 4T$.

№ вар.	1	6	11	16	21	26	31
A_0 , см	11	6	11	16	21	26	9
n , с ⁻¹	1	5	4	6	3	4	9
λ	1	0,6	1,1	0,16	0,21	0,26	0,31
m , г	1	6	11	6	2	5	9

Задачи 225. Варианты: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32

Материальная точка совершает затухающие колебания, время релаксации τ_p , начальная фаза $\varphi_0 = 0$. При отсутствии трения период колебаний составляет T_0 . Смещение материальной точки при $t = T/n$ равно x_t . Построить график этого колебательного движения. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за время $t = nT$? Чему равняется возвращающая сила в этот момент, если масса частицы m ?

№ вар.	2	7	12	17	22	27	32
T_0 , с	2	0,7	1,2	1,6	2	2,6	3
τ_p , с	6	2,1	3,6	4,2	4	6	9
x_t , см	2	6	9	7	4	6	9
n	6	6	9	7	8	6	9
m , г	2	7	12	17	22	27	32

Задачи 225. Варианты: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

Материальная точка массой m , подвешенная на нерастяжимой и невесомой нити длиной l , совершает затухающие колебания. Начальная амплитуда A_0 , коэффициент затухания δ . Через какое время амплитуда колебаний уменьшится в n раз? Чему равняется кинетическая энергия частицы в данный момент времени? Построить график смещения частицы от положения равновесия в зависимости от времени в диапазоне от $t = 0$ до $t = 4T$.

№ вар.	3	8	13	18	23	28	33
m , г	5	8	13	18	23	28	33
l , см	30	80	130	18	23	28	33
A_0 , см	3	8	13	1,5	3	4	3
δ , Гц	0,3	0,8	1,3	0,8	0,3	0,4	0,5
n	3	8	13	8	3	4	3

Задачи 225. Варианты: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34

Колебания пружинного маятника с жесткостью k и массой прикрепленного груза m вызваны за счет предварительного растяжения силой F . Колебания затухающие, с логарифмическим декрементом λ .

Определить: 1) время t , за которое амплитуда колебаний уменьшается в n раз; 2) число N полных колебаний, за которое произошло это уменьшение амплитуды. Построить график затухающих колебаний в зависимости от времени.

№ вар	4	9	14	19	24	29	34
k , Н/м	44	99	144	190	240	290	340
m , кг	0,4	0,9	1,4	1,9	0,24	0,29	0,34
F , Н	1,6	6,4	4,8	12,8	4	9	1,12
λ	0,4	0,08	0,12	0,09	0,2	0,24	0,28
n	4	8	2	6	3	5	4

Задачи 225. Варианты: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

Два следующих друг за другом наибольших отклонения математического маятника длиной l и с массой материальной точки m в одну и ту же сторону отличаются друг от друга на η . Определить коэффициент затухания δ , время релаксации τ_p и добротность Q колебательной системы. Чему равняется кинетическая энергия материальной точки в момент времени $t = \tau_p$. Построить график смещения частицы в зависимости от времени в диапазоне от $t = 0$ до $t = 4T$.

№ вар.	5	10	15	20	25	30	35
l , см	50	100	85	60	55	30	35
m , г	50	100	15	20	25	30	35
η , %	5	10	8	4	5	6	10

Задачи 226. Варианты: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29

В колебательном контуре с малым активным сопротивлением, содержащий конденсатор C и катушку индуктивности L , сила тока при резонансе изменяется по закону $I = I_0 \sin \Omega t$. Написать закон изменения напряжения на обкладках конденсатора, дифференциальное уравнение колебаний заряда. Определить мгновенные значения силы тока, а также напряжения на катушке и на конденсаторе в момент времени $t = T/n$. Построить графики изменения силы тока и напряжения в зави-



симости от времени. На какую длину волны и частоту настроен колебательный контур?

№ вар.	1	5	9	13	17	21	25	29
I_0 , мА	1	5	0,9	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9
C , мкФ	0,1	0,5	0,2	0,3	0,7	0,2	0,5	0,2
L , мГн	1	0,5	0,9	1,3	1,7	2,1	2,5	2
n	1	5	3	3	4	2	5	3

Задачи 226. Варианты: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30

В контур включены катушка самоиндукции с переменной индуктивностью от L_1 до L_2 и конденсатор переменной емкости от C_1 до C_2 . Какой диапазон частот и длин волн можно охватить, настраивая этот контур? В каких пределах может изменяться амплитуда силы тока, если амплитуда напряжения на обкладках конденсатора U_0 ? Определить максимальные значения энергии конденсатора и катушки. Для минимальной частоты написать дифференциальное уравнение изменения заряда на обкладках, а также построить графики изменения силы тока и напряжений на конденсаторе и на катушке в зависимости от времени.

№ вар.	2	6	10	14	18	22	26	30
L_1 , пГн	20	60	10	14	18	22	26	30
L_2 , пГн	200	600	1000	140	180	220	260	300
C_1 , пФ	20	6	10	14	18	22	26	30
C_2 , пФ	2000	6000	1000	1400	1800	2200	2600	3000
U_0 , В	2	6	10	1,4	1,8	2,2	2,6	3

Задачи 226. Варианты: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31

Переменный конденсатор колебательного контура изменяет свою емкость от C_1 до C_2 . Какой комплект катушек индукции нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостан-

ции в диапазоне длин волн от λ_1 до λ_2 ? Какой диапазон частот данных радиостанций? В каких диапазонах изменяются амплитуды силы тока и напряжения, если максимальный заряд конденсатора q_0 ? Чему равняется максимальная энергия конденсатора и катушки? Для максимальной длины волны написать дифференциальное уравнение изменения заряда, а также построить графики изменения силы тока, напряжений на конденсаторе и на катушке в зависимости от времени.

№ вар.	3	7	11	15	19	23	27	31
C_1 , пФ	30	70	110	150	190	230	270	310
C_2 , пФ	300	700	1100	1500	1900	2300	2700	3100
λ_1 , м	300	70	110	150	190	230	270	310
λ_2 , м	3000	700	1100	1500	1900	2300	2700	3100
q_0 , нКл	0,3	0,7	0,1	0,14	0,18	0,22	0,26	0,3

Задачи 226. Варианты: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

В идеальном колебательном контуре при резонансе напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U_C = U_{C0} \cos \Omega t$. Емкость конденсатора C , а индуктивность катушки L . Написать дифференциальное уравнение изменения заряда на обкладках конденсатора. На какую частоту и длину волны настроен колебательный контур? Определить максимальную энергию катушки и конденсатора, мгновенные значения силы тока, а также напряжений на них в момент времени $t = T/n$, построить графики изменения этих величин в зависимости от времени.

№ вар.	4	8	12	16	20	24	28	32
L , нГн	40	8	12	16	20	24	28	32
C , нФ	20	8	12	16	18	24	28	32
U_0 , мВ	40	60	100	140	180	220	260	300
n	4	8	2	6	2	4	3	4

Литература

1. *Детлаф, А. А.* Курс физики : учебное пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 2001. – 718 с.
2. *Трофимова, Т. И.* Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 2001. – 478 с.
3. *Вафин, Д.Б.* Физика : учебное пособие. Ч.2. /Д.Б. Вафин. – Казань : Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2007. – 472 с.
4. *Кухлинг, Х.* Справочник по физике : пер. с нем. / Х. Кухлинг. – М. : Мир, 1985. – 520 с.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Некоторые основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Ускорение свободного падения	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31441 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Нормальный молярный объем	$V_{\mu} = 22,41383 \text{ м}^3/\text{кмоль}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмидта	$N_L = 2,686754 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar = h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,6687 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
Постоянная Вина (смещения)	$b_1 = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,256637 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$
Число Фарадея	$F = 9,648453 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,00727647 \text{ а.е.м.}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,0086650 \text{ а.е.м.}$
Элементарный заряд	$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Удельный заряд электрона	$-e/m_e = -1,75881962 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Атомная единица массы	$a.e.m. = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 931494,32 \text{ кэВ}$
Радиус Бора	$r_1 = 5,29177249 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Постоянная Ридберга	$R = 3,2898419499 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ $R' = R/c = 1,097373 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$

Диэлектрическая проницаемость

Диэлектрик	ϵ	Диэлектрик	ϵ
Воздух	1,00059	Полихлорвинил	5
Воск	7,8	Слюда	4÷10
Вода	81	Стекло	5÷15
Керосин	7	Шифер	6÷10
Дерево	3,5÷5	Фарфор	6
Каучук	2,5÷3	Эбонит	2,7
Парафин	2÷2,4	Этиловый спирт	25,2
Полиэтилен	2,3	Метиловый спирт	33,5
Плексиглас	3÷4	Керамика	до 10 000
Полистирол	2,3÷2,5		

Магнитные восприимчивости $\chi = \mu - 1$

Диаммагнетики	$\chi, 10^{-6}$	Парамагнетики	$\chi, 10^{-6}$
Бензол	-7,5	Азот	0.013
Висмут	-176	Алюминий	23
Вода	-9,0	Воздух	0,38
Водород	-0,063	Вольфрам	176
Медь	-10,3	Жидкий кислород	3400
Каменная соль	-12,6	Кислород	1,9
Кварц	-15,1	Платина	360
Стекло	-12,6	Эбонит	14
Ферромагнетики	μ	Ферромагнетики	μ
Алмазная сталь	до 15 000	Пермаллой	до 50 000
Никель	" 300	Супермаллой	" 10 000
Полосовое железо	" 5 000	Твердая сталь	" 200

Электрохимические потенциалы некоторых металлов

	<i>Au</i>	<i>Hg</i>	<i>Ag</i>	<i>Cu</i>	<i>H</i>	<i>Pb</i>	<i>Ni</i>	<i>Cd</i>	<i>Fe</i>	<i>Zn</i>	<i>Mg</i>	<i>Li</i>
$\varphi, \text{В}$	1,4	0,86	0,80	0,34	0,0	0,13	0,24	0,4	0,44	0,76	2,34	3,02
	+					-						

Удельное электрическое сопротивление ρ и температурный коэффициент сопротивления α (при 20°C)

Материал	$\rho, 10^{-7} \text{ Ом}\cdot\text{м}$	$\alpha, 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
Алюминий	0,26	4,6
Вольфрам	0,52	4,7
Железо, чистое	0,9	6,3
Золото	0,21	3,9
Иридий	0,47	0,2
Константан	5	0,03
Литая сталь	1,3	5
Магний	0,44	4
Манганин	4,3	0,02
Медь	0,17	3,8
Нейзильбер	3,3	0,33
Никель	0,87	6,5
Нихром	11,2	0,25
Олово	1,2	3
Платина	1,07	3,9
Ртуть	9,6	0,92
Свинец	2	4,1
Серебро	0,15	4
Серый чугун	10	3,5

Приставки к единицам СИ

Приставка	Обозначение	Значение	Приставка	Обозначение	Значение
дека	да	10^1	деци	д	10^{-1}
гекто	г	10^2	санци	с	10^{-2}
кило	к	10^3	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^6	микро	мк	10^{-6}
гига	Г	10^9	нано	н	10^{-9}
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
пета	П	10^{15}	фемто	ф	10^{-15}
экса	Э	10^{18}	атто	а	10^{-18}

Учебное издание

Вафин Данил Биаллович
доктор технических наук

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ**

ЧАСТЬ 2

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 17.11.2010.
Подписано в печать 12.01.2011.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,3. Тираж 120.
Заказ №1.

НХТИ (филиал) ГОУ ВПО «КГТУ», г. Нижнекамск, 423570,
ул. 30 лет Победы, д. 5а.

