

Министерство образования и науки РФ
Нижекамский химико-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

Л.А. Апайчева, Л.Е. Шувалова

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Нижекамск
2014

УДК 517.3
A76

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:

Багоутдинова А.Г., кандидат технических наук, доцент;
Садыков А.В., кандидат технических наук, доцент.

Апайчева, Л.А.

A76 Кратные интегралы : учебное пособие / Л.А. Апайчева, Л.Е. Шувалова. - Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2014. - 72 с.

Содержит основные понятия о кратных интегралах и методах их решения. Показаны приложения кратных интегралов в механике и геометрии. Изложение материала сопровождается большим количеством типовых примеров с решениями. Приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для формирования профессиональных компетенций при подготовке бакалавров технических направлений вузов.

Подготовлено на кафедре математики НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

УДК 517.3

©Апайчева Л.А., Шувалова Л.Е., 2014

©Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2014

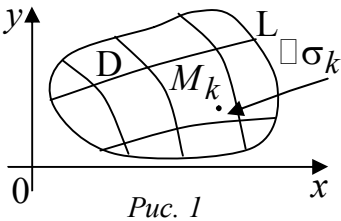
ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ	4
§ 1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	6
§ 2. Двойной интеграл в полярных координатах	19
§ 3. Приложения двойных интегралов.....	25
§ 4. Задачи для самостоятельного решения.....	32
Глава II. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ	43
§ 1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах	45
§ 2. Тройной интеграл в цилиндрических координатах	49
§ 3. Тройной интеграл в сферических координатах.....	51
§ 4. Приложения тройных интегралов.....	54
§ 5. Задачи для самостоятельного решения.....	59
Приложение	68
Литература	711

Глава I

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x, y) = f(M)$ определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy . Разобьем область D на n подобластей $\Delta\sigma_k$, площади которых также обозначим через $\Delta\sigma_k$, а диаметры – через d_k : $S = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k$. Возьмем произвольные точки $M_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ (рис.1).



Выражение

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\sigma_k$$

называется интегральной суммой для функции $f(M)$ по области D .

Если существует предел $\lim_{\max d_k \rightarrow 0} I_n$ и этот предел не зави-

сит ни от способа разбиения области D на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, ни от способа выбора точек $M_k \in \Delta\sigma_k$, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

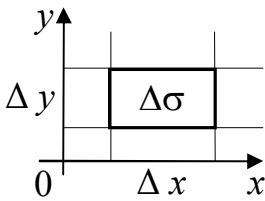


Рис. 2

В декартовой системе координат область D удобно разбивать на области $\Delta\sigma_k$ прямыми, параллельными осям координат (рис.2). Следовательно, $d\sigma = dxdy$ и

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k)\Delta\sigma_k. \quad (1)$$

Основные свойства двойного интеграла:

$$1. \iint_D \tilde{N}f(x,y)d\tilde{\sigma}dy = \tilde{N} \iint_D f(x,y)d\tilde{\sigma}dy, \quad \tilde{N} - \tilde{n}onst.$$

$$2. \iint_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))d\tilde{\sigma}dy = \\ = \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y)d\tilde{\sigma}dy.$$

3. Если область $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то

$$\iint_D f(x,y)d\tilde{\sigma}dy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)d\tilde{\sigma}dy.$$

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

1) Двойной интеграл по прямоугольнику

Пусть область D – замкнутый прямоугольник со сторо-

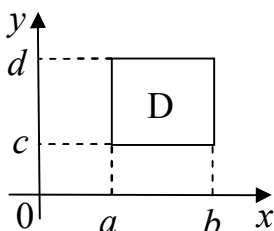


Рис. 3

нами, параллельными осям координат, то есть ограничена прямыми $\tilde{\sigma} = \tilde{\alpha}$, $\tilde{\sigma} = b$ ($a \leq x \leq b$), $y = c$, $y = d$ ($c \leq y \leq d$) (рис.3), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,} \quad (2)$$

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.} \quad (3)$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул, называются повторными или двукратными.

В формуле (2) интеграл $\int_{\tilde{n}}^d f(x, y) dy$ называется внутрен-

ним.

Вычисление двукратного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла. Он вычисляется в предположении, что переменная x сохраняет постоянное значение. Затем берется внешний интеграл, то есть результат первого интегрирования интегрируем по переменной x в пределах от a до b .

Если же для вычисления двойного интеграла берется формула (3), то первое (внутреннее) интегрирование берется по переменной x при постоянном y , а второе интегрирование – по переменной y .

Если $f(x, y)$ непрерывна в области D , то

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+2y)^3}$.

◀ Сначала вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dy}{(x+2y)^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 (x+2y)^{-3} d_y(x+2y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2y)^{-2}}{-2} \Big|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left((x+2)^{-2} - x^{-2} \right) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Вычислим внешний интеграл:

$$-\frac{1}{4} \int_1^2 \left(\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{5}{48}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Найти двойной интеграл от функции $z = x + 3y^2$ по области $D : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

$$\blacktriangleleft \iint_D (x + 3y^2) dx dy = \int_0^1 d\acute{o} \int_0^1 (x + 3y^2) d\tilde{o} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 3y^2 x \right) \Big|_{\tilde{o}=0}^{\tilde{o}=1} d\acute{o} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 3\acute{o}^2 \right) d\acute{o} = \left(\frac{1}{2} \acute{o} + \acute{o}^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Вычислим интеграл вторым способом, изменив порядок интегрирования

$$\iint_D (x + 3y^2) dx dy = \int_0^1 d\tilde{o} \int_0^1 (x + 3y^2) d\acute{o} = \int_0^1 \left(\tilde{o}\acute{o} + y^3 \right) \Big|_{\acute{o}=0}^{\acute{o}=1} d\tilde{o} =$$

$$= \int_0^1 (\tilde{o} + 1) d\tilde{o} = \frac{(\tilde{o} + 1)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

2) Двойной интеграл по произвольной плоской области.

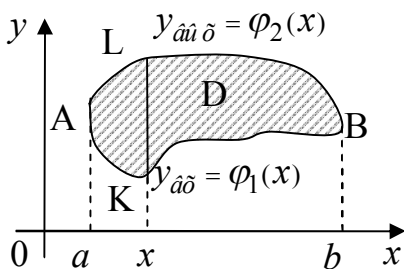


Рис. 4

1) Если область интегрирования D ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси Oy и проходящая через внутреннюю точку D , пересекает не более чем в двух точках (рис.4), то двойной интеграл, распространенный на

эту область, вычисляется по формуле

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.} \quad (4)$$

Пределы интегрирования в двукратном интеграле в правой части формулы находятся так:

а) область D проецируется на ось Ox . Этим определяется отрезок $[a, b]$, на котором в области D изменяется переменная

$x: a \leq x \leq b$. Числа a и b – абсциссы крайних точек (слева и справа) области D ;

б) точки A и B с абсциссами a и b делят контур на нижнюю и верхнюю части. Пусть эти части определяются соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Очевидно, что y изменяется от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$, то есть $\varphi_1(\tilde{\sigma}) \leq y \leq \varphi_2(\tilde{\sigma})$; причем предполагается, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и каждая из них задана одним аналитическим выражением.

Внутренний интеграл в формуле (4) отличается от внутреннего интеграла (2) тем, что здесь пределы интегрирования не постоянные величины c и d , а функции переменной x .

Внутренний интеграл в формуле (4) вычисляется в предположении, что x сохраняет постоянные значения.

2) Если область D ограничена кривой, которую любая прямая параллельная оси Ox и проходящая через внутреннюю точку D , пересекает не более чем в двух точках (рис. 5), то двойной интеграл вычисляется по формуле (5)

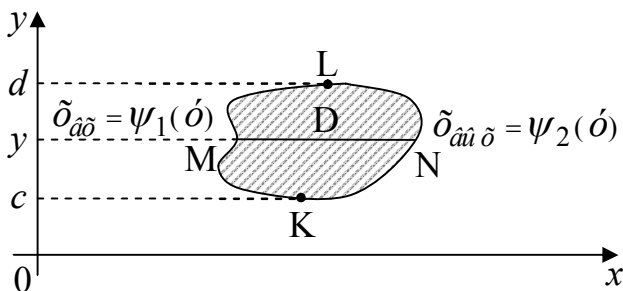


Рис. 5

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx} \quad (5)$$

а) Чтобы найти пределы во внешнем интеграле, область D проектируется на ось Oy . Так определяется отрезок $[\tilde{n}, d]$. Числа c и d будут соответственно нижними и верхними пределами во внешнем интеграле.

б) Точки K и L разбивают границу области на две кривые KML и KNL , уравнения которых $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[\tilde{n}, d]$ непрерывны и каждая из них задана одним аналитическим выражением. Поэтому x изменяется от $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$, то есть $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$.

Внутренний интеграл вычисляется по переменной x в предположении, что y сохраняет постоянное значение. В результате

вычисления внутреннего интеграла $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ получится

функция переменной y , а повторное интегрирование дает число.

Замечания

а) Внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны.

б) Пределы внутреннего интеграла в общем случае являются переменными и зависят от той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл.

в) Все пределы интегрирования будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

В случае 1), если окажется, что нижняя или верхняя граница состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область следует разбить прямыми, параллельными оси Oy , на части, в любой из которых нижняя и верхняя граница определяются одним уравнением.

Так для области, изображенной на *рис.6*, вычисление двойного интеграла приводит к вычислению двух повторных интегралов:

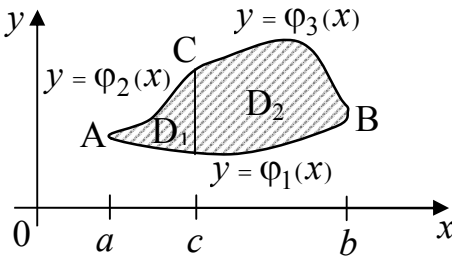


Рис. 6

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x, y) dy.$$

В случае 2), если левая или правая границы будут состоять из нескольких участков с различными уравнениями, то область D следует разбить прямыми параллельными оси Ox на части, где левая и правая границы определяются не разными аналитическими выражениями.

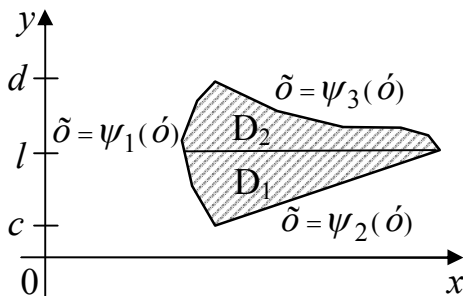


Рис. 7

Двойной интеграл по области D , изображенной на рис.7, сводится к двум повторным интегралам:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{\tilde{n}}^l d\acute{o} \int_{\psi_1(\acute{o})}^{\psi_2(\acute{o})} f(x, y) dx + \int_l^d dy \int_{\psi_1(\acute{o})}^{\psi_3(\acute{o})} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Пример 3. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в

виде повторного интеграла двумя способами (с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y), если область D задана указанными линиями

$D: \acute{o} = \acute{a}^{\tilde{\delta}}, \tilde{\delta} = 0, \tilde{\delta} = 2, \acute{o} = 0$ (рис.8).

◀ а) Если внешнее интегрирование проводится по переменной x , то в области $D: 0 \leq \tilde{\delta} \leq 2,$

$$0 \leq \acute{o} \leq \acute{a}^{\tilde{\delta}}.$$

б) Если внешнее интегрирование проводится по переменной y , то область D следует разбить на две области D_1 и D_2 прямой, проходящей через точку $\acute{A}(0,1)$ параллельно оси Ox , то есть прямой $\acute{o} = 1$. Тогда в области $D_1: 0 \leq \acute{o} \leq 1, 0 \leq \tilde{\delta} \leq 2$.

Далее рассмотрим область D_2 . Из уравнения $\acute{o} = \acute{a}^{\tilde{\delta}}$ находим $\tilde{\delta} = \ln y$.

Имеем $1 \leq \acute{o} \leq \acute{a}^2, \ln y \leq \tilde{\delta} \leq 2$.

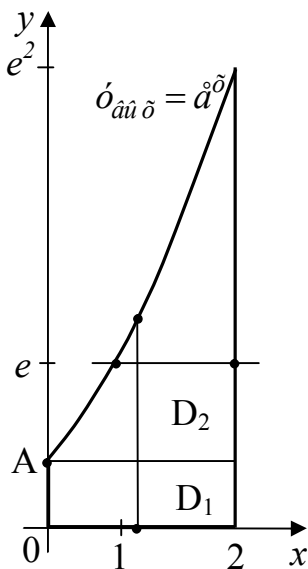


Рис. 8

Итак, получаем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\acute{a}^{\tilde{\delta}}} f(x, \acute{o}) dy =$$

$$= \int_0^1 d\acute{o} \int_0^2 f(x, \acute{o}) d\tilde{\delta} + \int_1^2 d\acute{o} \int_{\ln y}^2 f(x, \acute{o}) d\tilde{\delta}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4. Вычислить $\iint_D xy dx dy$, если область D ограничена

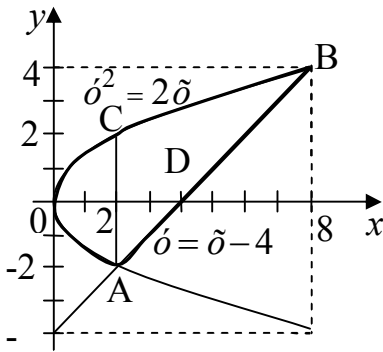


Рис. 9

линиями $y = x - 4$ и $y^2 = 2x$ (рис.9). ◀ Находим точки пересечения прямой и параболы, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \acute{o}^2 = 2\tilde{\delta}, \\ \acute{o} = \tilde{\delta} - 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\tilde{\delta} - 4)^2 = 2\tilde{\delta}, \\ \acute{o} = \tilde{\delta} - 4, \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} \tilde{\delta}^2 - 10\tilde{\delta} + 16 = 0, \\ \acute{o} = \tilde{\delta} - 4. \end{cases}$$

Отсюда находим точки пересечения $\hat{A}(2; -2)$, $\hat{A}(8; 4)$.

Область D определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -2 \leq \acute{o} \leq 4, \\ \frac{\acute{o}^2}{2} \leq \tilde{\delta} \leq \acute{o} + 4. \end{cases}$$

Вычислим двойной интеграл по формуле (5):

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^4 y dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{y+4}{2}} x dx = \int_{-2}^4 y \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{y+4}{2}} dy = \\
&= \int_{-2}^4 \left(\frac{(y+4)^2}{2} - \frac{y^4}{8} \right) y dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(y^2 + 8y + 16 - \frac{y^4}{4} \right) y dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right) \Big|_{-2}^4 = 90.
\end{aligned}$$

Если интегрировать в другом порядке – сначала по y , а затем по x , то, как было сказано выше, необходимо разбить область интегрирования прямой AC , параллельной оси Oy , на две части, так как здесь нижняя граница состоит из двух участков, которые имеют различные уравнения.

$$y = -\sqrt{2x} \quad (OA) \text{ и } y = \delta - 4 \quad (A\hat{A})$$

$$I = \iint_{D_1} \delta \delta x dy + \iint_{D_2} xy dx dy = \int_0^2 x dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy + \int_2^8 x dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \right) dx + \int_2^8 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{x-4}^{\sqrt{2x}} \right) x dx = \\
&= 0 + \frac{1}{2} \int_2^8 (2x - (x-4)^2) x dx = \frac{1}{2} \int_2^8 (10x^2 - x^3 - 16x) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} \delta^3 - \frac{\delta^4}{4} - 8\delta^2 \right) \Big|_2^8 = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} \cdot 8^3 - \frac{8^4}{4} - 512 - \frac{10}{3} \cdot 2^3 + \frac{2^4}{4} + 32 \right) = 90. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Очевидно, что первый способ вычисления целесообразнее второго.

Пример 5. Изменить порядок интегрирования в повторном инте-

грале
$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

◀ Область интегрирования задается системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq \delta \leq \sqrt{2}, \\ \delta \leq \delta \leq \sqrt{4 - \delta^2}. \end{cases}$$

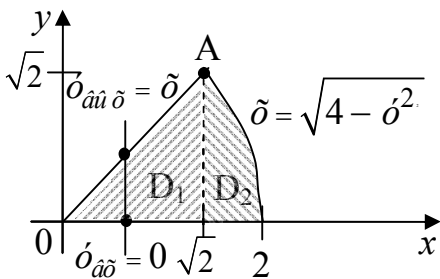


Рис. 10

Строим область интегрирования D по пределам интегрирования:

$$\delta = o, \quad \delta = \sqrt{4 - o^2},$$

$$o = 0, \quad o = \sqrt{2}$$

(рис.10).

Окружность $\delta = \sqrt{4 - o^2}$ и прямая $\delta = o$ пересекаются в точке $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. При изменении порядка интегрирования нужно спроектировать область интегрирования D на ось Ox . Область D прямой $\delta = \sqrt{2}$ разбивается на две области D_1 и D_2 . В области D_1 : $0 \leq \delta \leq \sqrt{2}$, $o_{\delta\delta} = 0$, $o_{\delta\delta} = \delta$ в области D_2 : $\sqrt{2} \leq \delta \leq 2$, $o_{\delta\delta} = 0$, $o_{\delta\delta} = \sqrt{4 - \delta^2}$. Поэтому имеем

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} d\delta \int_0^{\delta} f(x, y) do + \int_{\sqrt{2}}^2 d\delta \int_0^{\sqrt{4 - \delta^2}} f(x, y) do. \blacktriangleright$$

§ 2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Для упрощения вычислений в двойных интегралах часто используется метод подстановки, аналогично, как при вычислении определенного интеграла. Наиболее важным для практических приложений частным случаем замены переменных является замена декартовых координат x и y полярными координатами r и φ :

$$\boxed{\tilde{\omega} = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi} \quad (6)$$

Элемент площади в формуле (1) в полярных координатах имеет вид

$$\boxed{dx dy = r dr d\varphi} \quad (7)$$

Формула перехода от интеграла (1) в декартовых координатах к интегралу в полярных интегралах будет иметь вид

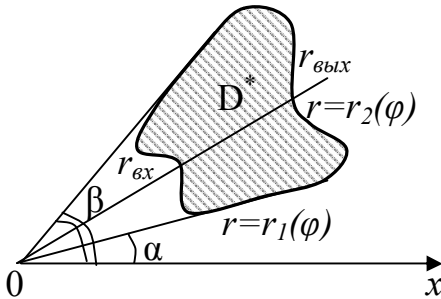
$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi} \quad (8)$$

D – область в декартовой системе координат,

D^* - соответствующая область в полярной системе координат.

Правила расстановки пределов интегрирования

1. Пусть полюс не содержится внутри области интегрирования D^* , заключенной между



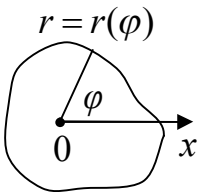
лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$, и кривыми

$r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$.

Рис. 11

Луч, исходящий из полюса, пересекает ее границу не более чем в двух точках (такая область D^* называется правильной) (рис.11). Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (9)$$



2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования, ограниченной кривой, уравнение которой в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$ (рис.12).

Тогда

Рис. 12

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (10)$$

3. Пусть областью интегрирования является круг с центром в

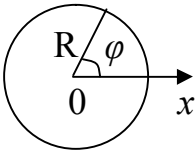


Рис. 13

начале координат: $\delta^2 + \acute{o}^2 \leq R^2$. В полярной системе координат уравнение окружности имеет вид: $r = R$ (рис.13).

Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (11)$$

Замечание. Двойной интеграл удобно вычислять в полярных координатах, если областью интегрирования служит круг.

Пример 6. Вычислить $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$, где область D оп-

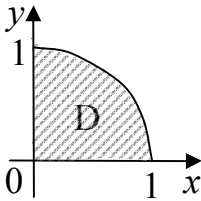


Рис. 14

ределена неравенствами $x^2 + y^2 \leq 1$, $\delta \geq 0$, $\acute{o} \geq 0$ (рис.14).

◀ Интеграл вычислим в полярных координатах.

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{И } \delta \hat{e} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{e} \hat{i} \hat{o} \hat{i} \hat{\delta} \hat{i} \hat{o} \hat{e} \hat{u} \text{ (6)-(8)} \\ x = r \cos \varphi; \quad dx dy = r dr d\varphi; \\ y = r \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} r dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{(r-r^3) dr}{\sqrt{1-r^4}} \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-(r^2)^2}} - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4r^3 dr}{\sqrt{1-r^4}} \right) d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(r^2)}{\sqrt{1-(r^2)^2}} + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(1-r^4)}{\sqrt{1-r^4}} \right) = \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \arcsin r^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-r^4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \arcsin 1 - \frac{1}{2} \right) = \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right). \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, $D: \tilde{\sigma}^2 + \acute{\sigma}^2 \leq 4\tilde{\sigma}$.

◀ Приведем уравнение $\tilde{\sigma}^2 + \acute{\sigma}^2 = 4\tilde{\sigma}$ к каноническому виду:

$(\tilde{\sigma} - 2)^2 + \acute{\sigma}^2 = 4$. Это уравнение окружности с центром в точке $C(2;0)$, радиус $R=2$ (рис.15). Уравнение данной кривой в по-

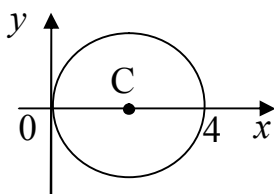


Рис. 15

лярной системе координат примет вид:

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 4r \cos \varphi,$$

$$r^2 = 4r \cos \varphi, \text{ то есть } r = 4 \cos \varphi.$$

Вычислим интеграл в полярной системе координат, используя формулы (6), (7).

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^{4 \cos \varphi} \right) d\varphi = 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

$$= 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi =$$

$$= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
&= 16 \left(\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 16 \left(\frac{3}{4} \pi + \sin \pi + \frac{1}{8} \sin 2\pi + \frac{3}{4} \pi + \sin \pi + \frac{1}{8} \sin 2\pi \right) = \\
&= 24\pi . \blacktriangleright
\end{aligned}$$

§3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Таблица 1.

Приложения двойных интегралов в геометрии

№	Наименование	Общая формула	Прямоугольные координаты	Полярные координаты
1	Площадь плоской фигуры D в плоскости Oxy	$S = \iint_D d\sigma$	$S = \iint_D dx dy$	$S = \iint_{D^*} r dr d\varphi$
2	Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью D , расположенной в плоскости XOY .	$V = \iint_D z d\sigma$	$V = \iint_D f(x, y) dx dy$	$V = \iint_{D^*} f(r, \varphi) r dr d\varphi$
3	Площадь части поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, проектирующейся в область D плоскости Oxy		$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$	

Приложение двойных интегралов в механике

4	Масса тонкой плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$.	$m = \iint_D \rho d\sigma$	$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$	$m = \iint_{D^*} \rho(r, \varphi) r dr d\varphi$
5	Статические моменты пластинки D относительно осей Ox и Oy	$S_{\bar{x}} = \iint_D \bar{x} \rho d\sigma, S_{\bar{y}} = \iint_D \bar{y} \rho d\sigma$	$S_{\bar{x}} = \iint_D \bar{x} \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}, S_{\bar{y}} = \iint_D \bar{y} \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}$	
6	Координаты центра тяжести пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, m – масса пластинки	$x_{\bar{n}} = \frac{S_{\bar{x}}}{m}, y_{\bar{n}} = \frac{S_{\bar{y}}}{m}$	$x_{\bar{n}} = \frac{\iint_D x \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}}{\iint_D \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}}, y_{\bar{n}} = \frac{\iint_D \bar{y} \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}}{\iint_D \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}}$	
7	Координаты центра тяжести материальной однородной пластинки, $\rho = const$	$x_{\bar{n}} = \frac{\iint_D x d\sigma}{S}, y_{\bar{n}} = \frac{\iint_D y d\sigma}{S}$	$x_{\bar{n}} = \frac{\iint_D x dx dy}{S}, y_{\bar{n}} = \frac{\iint_D y dx dy}{S}$	$x_{\bar{n}} = \frac{\iint_{D^*} r^2 \cos \varphi dr d\varphi}{S}, y_{\bar{n}} = \frac{\iint_{D^*} r^2 \sin \varphi dr d\varphi}{S}$

Область D - проекция на плоскость XOY . В каждую точку области D проектируется только одна точка поверхности

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ли-

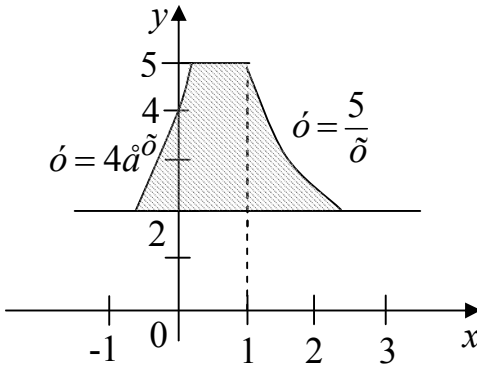


Рис. 16

ниями $o = \frac{5}{\delta}$ и $o = 4a^o \delta$,

$o = 2$, $o = 5$ (рис.16).

◀ По формуле 1 таблицы 1 находим площадь

$$S = \iint_D dx dy.$$

Для вычисления двойного интеграла удобнее сначала интегрировать по x , затем

по y .

Воспользуемся формулой (5). Из уравнения $o = 4a^o \delta$ находим

$\delta a^o \delta = \ln \frac{o}{4}$, а из уравнения $o = \frac{5}{\delta}$ выводим $\delta a^o \delta = \frac{5}{o}$. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \int_2^5 dy \int_{\ln \frac{o}{4}}^{\frac{5}{o}} dx = \int_2^5 \left(x \Big|_{\ln \frac{o}{4}}^{\frac{5}{o}} \right) dy = \int_2^5 \left(\frac{5}{y} - \ln \frac{y}{4} \right) dy = \\ &= 5 \ln |y| \Big|_2^5 - I_2 = 5 \ln \frac{5}{2} - I_2. \end{aligned}$$

Интеграл I_2 вычислим по частям:

$$I_2 = \int_2^5 \ln \frac{y}{4} dy = \left| \begin{array}{l} u = \ln \frac{y}{4}, \quad du = \frac{dy}{y}, \\ dv = dy, \quad v = y. \end{array} \right| = \left. \ln \frac{y}{4} \right|_2^5 - \int_2^5 y \cdot \frac{1}{y} dy =$$

$$= 5 \ln \frac{5}{4} - 2 \ln \frac{1}{2} - y \Big|_2^5 = 5 \ln \frac{5}{4} + \ln 4 - 3.$$

Таким образом, имеем

$$S = 5 \ln \frac{5}{2} - 5 \ln \frac{5}{4} - \ln 4 + 3 = (5 \ln 2 - \ln 4 + 3) =$$

$$= \ln 8 + 3 \hat{=} \hat{=} \hat{=} \blacktriangleright$$

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\delta^2 + \acute{o}^2 = 2\delta$, $\delta^2 + \acute{o}^2 = 2\acute{o}$ (рис.17).

◀ Канонические уравнения данных линий имеют вид:

$(\delta - 1)^2 + \acute{o}^2 = 1$, $\delta^2 + (\acute{o} - 1)^2 = 1$. Это окружности радиуса 1 с центрами в точках $(1,0)$ и $(0,1)$

соответственно. Запишем уравнения окружностей в полярных координатах, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Уравнения принимают вид соответственно $r = 2 \cos \varphi$, $r = 2 \sin \varphi$.

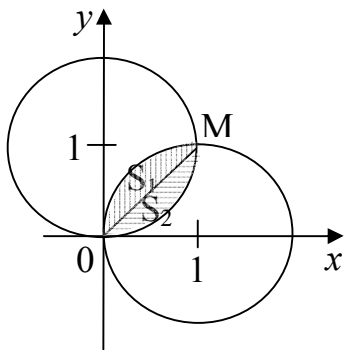


Рис. 17

Совместно решая эти уравнения, находим

$$2 \cos \varphi = 2 \sin \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Луч $\hat{I} \hat{I}$ ($\varphi = \frac{\pi}{4}$) делит область D на две равные части S_1

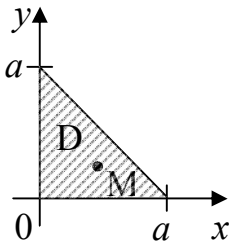
и S_2 . Поэтому

$$S = 2S_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{2 \sin \varphi} \right) d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \hat{\text{ä}}. \blacktriangleright$$

Пример 10. Найти массу, статистические моменты и координаты центра тяжести равнобедренного



прямоугольного треугольника (рис.18). Поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна сумме координат точки.

Рис. 18

◀ Пусть M – произвольная точка пластинки D . По условию $\rho = k(\tilde{\delta} + \acute{o})$, где k – коэффициент пропорциональности. Уравнение гипотенузы: $\tilde{\delta} + \acute{o} = \grave{a}$. По формуле 4 таблицы 1 находим массу пластинки:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D k(x+y) dx dy = k \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x+y) dy = \\
 &= k \int_0^a \left(xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{a-x} \right) dx = k \int_0^a \left(x(a-x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} k \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} k \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{3} ka^3.
 \end{aligned}$$

Находим статистические моменты пластинки. По формулам 5 таблицы 1 получаем:

$$\begin{aligned}
 S_x &= \iint_D yk(x+y) dx dy = k \int_0^a dx \int_0^{a-x} (xy + y^2) dy = \\
 &= k \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{a-x} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} k \int_0^a (a^2 x - 2ax^2 + x^3) dx + \frac{k}{3} \int_0^a (a-x)^3 dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}k \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a - \frac{k}{3} \cdot \frac{(a-x)^4}{4} \Big|_0^a = \frac{ka^4}{8}.$$

$$S_{\delta} = \iint_D \delta k(x+y) dx dy = k \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + \delta y) dy = \frac{ka^4}{8}.$$

Используя формулы 6 таблицы 1, находим координаты центра тяжести пластинки

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{ka^4}{8} : \frac{1}{3}ka^3 = \frac{3}{8}a; \quad \delta_c = \frac{S_{\delta}}{m} = \frac{3}{8}a.$$

Пример 11. Найти площадь поверхности, вырезанной цилиндром $\delta^2 + \delta^2 = 4$ из сферы $\delta^2 + \delta^2 + z^2 = 9$ (рис.19).

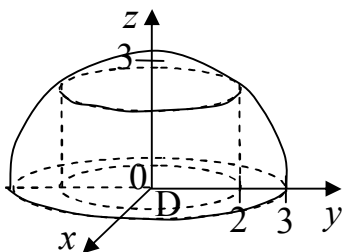


Рис. 19

◀ В силу симметрии поверхности относительно координатных плоскостей вычислим 1/8 часть ее площади. Тогда по формуле 3 таблицы 1 находим

$$\frac{1}{8}\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

где D – четверть круга, ограниченного окружностью $\delta^2 + \delta^2 = 4$.

Уравнение поверхности разрешим относительно z :

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

$$z'_{\tilde{o}} = -\frac{\tilde{o}}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad z'_{\acute{o}} = -\frac{\acute{o}}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{8}\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{\tilde{o}^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{\acute{o}^2}{9 - x^2 - y^2}} dx dy =$$

$$= \iint_D \frac{3 dx dy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ dx dy = r dr d\varphi. \end{array} \right| =$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{9 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{d(9 - r^2)}{\sqrt{9 - r^2}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \varphi \left| \frac{\pi}{2} \cdot 2\sqrt{9 - r^2} \right|_0^2 = \frac{3(3 - \sqrt{5})}{2} \pi;$$

$$\sigma = 12(3 - \sqrt{5})\pi \quad \blacktriangleright$$

§ 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Представить двойной интеграл

$$S = \iint_D f(\delta, \acute{o}) dx dy$$

в виде повторного интеграла при разных

порядках интегрирования по x и по y , если известно, что область D ограничена линиями:

1.	$\grave{a}) D: \acute{o} = \delta, \delta = 0,$ $\delta + \acute{o} = 3$	$\acute{a}) D: (\delta - 2)^2 + \acute{o}^2 = 1, \delta \geq 0,$ $\acute{o} \leq 0, \acute{o} \geq -1$
2.	$\grave{a}) D: \acute{o} = 2\delta, \acute{o} = 0,$ $2\delta + \acute{o} - 4 = 0$	$\acute{a}) D: \acute{o} = \log_2 \delta, \delta \geq 0,$ $\acute{o} \geq 0, \acute{o} \leq 1$
3.	$\grave{a}) D: \acute{o} = -3\delta + 1, \delta = 0,$ $-2\delta + \acute{o} - 6 = 0$	$\acute{a}) D: -4\delta + 2\acute{o} + 5 = 0, \delta^2 = 2\acute{o}$
4.	$\grave{a}) D: \acute{o} = 2\delta + 1, \acute{o} = 0,$ $\delta + 4\acute{o} + 4 = 0$	$\acute{a}) D: \acute{o} = 3^{\delta}, 2\delta + \acute{o} - 5 = 0, \delta = 0$
5.	$\grave{a}) D: \acute{o} = -4\delta + 1, \delta = 0,$ $-5\delta + 2\acute{o} + 10 = 0$	$\acute{a}) D: \acute{o} = \sqrt{4 - \delta^2}, \acute{o} = \sqrt{3\delta}, \delta \geq 0$
6.	$\grave{a}) D: \acute{o} = -3\delta + 1, \acute{o} = 0,$ $\delta - 2\acute{o} - 6 = 0$	$\acute{a}) D: (\delta - 4)^2 + \acute{o}^2 = 1, \delta \geq 0,$ $\acute{o} \geq 0, \acute{o} \leq 1$
7.	$\grave{a}) D: \acute{o} = 3\delta + 1, \delta = 0,$ $2\delta + 4\acute{o} + 8 = 0$	$\acute{a}) D: \acute{o} = \lg x, \delta \geq 0, \acute{o} \geq 0, \acute{o} \leq 1$
8.	$\grave{a}) D: \acute{o} = -2\delta + 1, \acute{o} = 0,$ $2\delta - 5\acute{o} + 10 = 0$	$\acute{a}) D: 2\delta + 3\acute{o} - 2 = 0, \acute{o}^2 = -2\delta$
9.	$\grave{a}) D: \acute{o} = 3\delta, \delta = 0,$ $\delta + \acute{o} - 4 = 0$	$\acute{a}) D: \acute{o} = 2^{-\delta}, 3\delta - \acute{o} + 5 = 0,$ $\delta \leq 0$
10.	$\grave{a}) D: \acute{o} = \delta, \acute{o} = 0,$ $3\delta + 2\acute{o} - 6 = 0$	$\acute{a}) D: \acute{o} = \sqrt{4 - \delta^2}, \acute{o} = \sqrt{3\delta}, \acute{o} \geq 0$
11.	$\grave{a}) D: \acute{o} = -2\delta + 1, \delta = 0,$ $4\delta - \acute{o} - 8 = 0$	$\acute{a}) D: \delta^2 + (\acute{o} - 2)^2 = 1, \delta \geq 0,$ $\acute{o} \geq 0, \delta \leq 1$

12.	$\grave{a})D: \acute{o} = 3\grave{\delta} + 1, \acute{o} = 0,$ $2\grave{\delta} + 3\acute{o} + 6 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = \ln \grave{\delta}, \grave{\delta} \geq 0, \acute{o} \geq -1, \acute{o} \leq 0$
13.	$\grave{a})D: \acute{o} = -4\grave{\delta} + 2, \acute{o} = 0,$ $-3\grave{\delta} + \acute{o} + 6 = 0$	$\acute{a})D: 2\acute{o} - 5\grave{\delta} + 4 = 0, \grave{\delta}^2 = 2\acute{o}$
14.	$\grave{a})D: \acute{o} = -\grave{\delta} + 3, \acute{o} = 0,$ $-2\grave{\delta} + \acute{o} - 8 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = 2^{-\grave{\delta}}, 4\grave{\delta} - \acute{o} - 6 = 0,$ $\grave{\delta} \geq 0$
15.	$\grave{a})D: \acute{o} = 5\grave{\delta} + 1, \grave{\delta} = 0,$ $\grave{\delta} + 2\acute{o} + 4 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = -\sqrt{4 - \grave{\delta}^2}, \acute{o} = -\sqrt{3\grave{\delta}},$ $\grave{\delta} \geq 0$
16.	$\grave{a})D: \acute{o} = -\grave{\delta} + 2, \acute{o} = 0,$ $\grave{\delta} - 2\acute{o} - 6 = 0$	$\acute{a})D: \grave{\delta}^2 + (\acute{o} + 4)^2 = 1, \grave{\delta} \geq -1,$ $\grave{\delta} \leq 0, \acute{o} \leq 0$
17.	$\grave{a})D: \acute{o} = -3\grave{\delta} - 1, \acute{o} = 0,$ $2\grave{\delta} - 5\acute{o} - 10 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = \log_{\frac{1}{2}} \grave{\delta}, \grave{\delta} \geq 0,$ $\acute{o} \leq 0, \acute{o} \geq -1$
18.	$\grave{a})D: \acute{o} = 2\grave{\delta}, \grave{\delta} = 0,$ $\grave{\delta} + \acute{o} = 1$	$\acute{a})D: \acute{o}^2 = 2\grave{\delta}, 5\acute{o} - 2\grave{\delta} - 4 = 0$
19.	$\grave{a})D: \acute{o} = \grave{\delta} - 4, \acute{o} = 0,$ $2\grave{\delta} + 3\acute{o} - 6 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = 3^{-\grave{\delta}}, -2\grave{\delta} + \acute{o} - 5 = 0,$ $\grave{\delta} \leq 0$
20.	$\grave{a})D: \acute{o} = -4\grave{\delta} + 1, \grave{\delta} = 0,$ $2\grave{\delta} - \acute{o} - 4 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = -\sqrt{4 - \grave{\delta}^2}, \acute{o} = -\sqrt{3\grave{\delta}},$ $\acute{o} \leq 0$
21.	$\grave{a})D: \acute{o} = 2\grave{\delta} - 1, \acute{o} = 0,$ $\grave{\delta} + 3\acute{o} + 6 = 0$	$\acute{a})D: \grave{\delta}^2 + (\acute{o} - 3)^2 = 1, \acute{o} \geq 0,$ $\grave{\delta} \geq -1, \grave{\delta} \leq 0$
22.	$\grave{a})D: \acute{o} = -3\grave{\delta} + 2, \grave{\delta} = 0,$ $-\grave{\delta} + 2\acute{o} + 4 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = \log_{\frac{1}{4}} \grave{\delta}, \grave{\delta} \geq 0,$ $\acute{o} \geq 0, \acute{o} \leq \frac{1}{4}$
23.	$\grave{a})D: \acute{o} = -5\grave{\delta} + 1, \acute{o} = 0,$ $2\grave{\delta} - \acute{o} + 10 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = 3^{-\grave{\delta}}, 4\grave{\delta} - \acute{o} - 7 = 0,$ $\grave{\delta} \geq 0$
24.	$\grave{a})D: \acute{o} = 3\grave{\delta} + 3, \grave{\delta} = 0,$ $2\grave{\delta} + \acute{o} + 6 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = \log_3 \grave{\delta}, \grave{\delta} + 3\acute{o} - 6 = 0,$ $\acute{o} \geq 0$

25.	$\grave{a})D: \acute{o} = -2\grave{\delta} - 1, \acute{o} = 0,$ $-3\grave{\delta} + \acute{o} - 6 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = -\sqrt{4 - \grave{\delta}^2}, \acute{o} = -\sqrt{3\grave{\delta}},$ $\acute{o} \geq 0$
26.	$\grave{a})D: \acute{o} = 4\grave{\delta}, \grave{\delta} = 0,$ $2\grave{\delta} + \acute{o} = 4$	$\acute{a})D: \grave{\delta}^2 + (\acute{o} + 2)^2 = 1, \grave{\delta} \geq 0,$ $\grave{\delta} \leq 1, \acute{o} \leq 0$
27.	$\grave{a})D: \acute{o} = 2\grave{\delta} - 6, \acute{o} = 0,$ $\grave{\delta} + \acute{o} - 5 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = \lg x, \grave{\delta} \geq 0, \acute{o} \leq 0, \acute{o} \geq -1$
28.	$\grave{a})D: \acute{o} = -\grave{\delta} + 2, \grave{\delta} = 0,$ $3\grave{\delta} - \acute{o} + 6 = 0$	$\acute{a})D: 4\grave{\delta} + 3\acute{o} - 2 = 0, \acute{o}^2 = -4\grave{\delta}$
29.	$\grave{a})D: \acute{o} = 3\grave{\delta} - 1, \acute{o} = 0,$ $2\grave{\delta} + 5\acute{o} + 10 = 0$	$\acute{a})D: (\grave{\delta} + 3)^2 + \acute{o}^2 = 1, \grave{\delta} \leq 0,$ $\acute{o} \geq -1, \acute{o} \leq 0$
30.	$\grave{a})D: \acute{o} = -5\grave{\delta} + 1, \grave{\delta} = 0,$ $-\grave{\delta} + 3\acute{o} + 6 = 0$	$\acute{a})D: \acute{o} = -\sqrt{4 - \grave{\delta}^2}, \acute{o} = -\sqrt{3\grave{\delta}},$ $\grave{\delta} \leq 0$

Задача 2. Изменить порядок интегрирования.

1. $\int_0^1 dy \int_3^{4-y} f(x, y) dx;$	2. $\int_{-1}^0 dx \int_{4^{-x}}^{x+5} f(x, y) dy;$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{-2}{\pi}x}^{\sin x} f(x, y) dy;$	4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{\frac{2}{\pi}x+1} f(x, y) dy;$
5. $\int_0^1 dx \int_{\arctg x}^{-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}} f(x, y) dy;$	6. $\int_{-1}^0 dy \int_{3^{-y}}^{y+4} f(x, y) dx;$
7. $\int_{-1}^0 dx \int_{e^{-x}}^{ex+2e} f(x, y) dy;$	8. $\int_0^{\pi} dx \int_{x-\pi}^{\cos x} f(x, y) dy;$

$$9. \int dx \int_{\pi x - \frac{3\pi}{4}}^{an} f(x, y) dy;$$

$$11. \int_0^1 dx \int_{3^x}^{-x+4} f(x, y) dy;$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{tgx}^{-\frac{4}{\pi}x+2} f(x, y) dy;$$

$$15. \int_0^1 dx \int_{2^x}^{-x+3} f(x, y) dy;$$

$$17. \int_0^1 dx \int_{\arccos x}^{x+\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy;$$

$$19. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx \int_{\sin x}^{\frac{4}{\pi}x+1} f(x, y) dy;$$

$$21. \int_0^1 dx \int_{x-\frac{1}{2}}^{2^{-x}} f(x, y) dy;$$

$$23. \int_{-1}^0 dx \int_{\arctg x}^{\frac{\pi}{4}x+\pi} f(x, y) dy;$$

$$10. \int_0^1 dy \int_{2^y}^{3-y} f(x, y) dx;$$

$$12. \int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{-\frac{\pi}{2}x+\pi} f(x, y) dy;$$

$$14. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx \int_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\cos x} f(x, y) dy;$$

$$16. \int_0^1 dy \int_{10^y}^{11-y} f(x, y) dx;$$

$$18. \int_0^1 dx \int_{\pi x - \frac{3\pi}{4}}^{\arctg x} f(x, y) dy;$$

$$20. \int_1^e dx \int_{\ln x}^{\frac{-x}{e}+2} f(x, y) dy;$$

$$22. \int_{-1}^0 dx \int_{\frac{-\pi}{2}x-\pi}^{\arcsin x} f(x, y) dy;$$

$$24. \int_{-1}^0 dx \int_{\arcsin x}^{\frac{\pi}{2}x-\pi} f(x, y) dy;$$

$25. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx \int_{\cos x}^{x+\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy;$	$26. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 dx \int_{\frac{-2x}{\pi}-2}^{\sin x} f(x, y) dy;$
$27. \int_{-1}^0 dx \int_{\arctg x}^{\pi x + \frac{3\pi}{4}} f(x, y) dy;$	$28. \int_{-1}^0 dx \int_{\arccos x}^{\pi x + 2\pi} f(x, y) dy;$
$29. \int_1^5 dx \int_{\log_5 x}^{-x+6} f(x, y) dy;$	$30. \int_{-1}^0 dy \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^y}^{y+3} f(x, y) dx.$

Задача 3. Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной линиями.

- $\iint_D \delta(\delta-1) dx dy, D: \delta = \sqrt{\delta}, \delta = -\delta^3, \delta = 1.$
- $\iint_D \delta \delta dx dy, D: \delta = -\delta^2, \delta = \sqrt{\delta+2}, \delta = 0.$
- $\iint_D \delta(\delta-2) dx dy, D: \delta = \delta^2, \delta = \sqrt{\delta-2}, \delta = 0, \delta = 1.$
- $\iint_D \sqrt[3]{\delta} \delta dx dy, D: \delta = \sqrt{1-\delta}, \delta = -\delta^2, \delta = 0, \delta = 1.$
- $\iint_D \delta(\delta+1) dx dy, D: \delta = \delta^2, \delta = -\sqrt{\delta}, \delta = 1.$
- $\iint_D \delta^2 \delta dx dy, D: \delta = -\sqrt{\delta+3}, \delta - \delta + 3 = 0, \delta = 0.$

7. $\iint_D \sqrt{\delta}(\acute{o} + \delta) dx dy$, $D: \acute{o} = -\delta^2 - 1$, $\acute{o} = 0$, $\delta = 1$, $\delta = 0$.
8. $\iint_D (5 - \delta) \cdot \sqrt[3]{\acute{o}} dx dy$, $D: \acute{o} = 2\delta$, $\acute{o} = \delta$, $\delta = 1$.
9. $\iint_D \sqrt{\acute{o}}(\delta - \acute{o}) dx dy$, $D: \acute{o} = \delta$, $\delta + \acute{o} - 3 = 0$, $\acute{o} = 0$.
10. $\iint_D (\delta + \acute{o}) dx dy$, $D: \acute{o} = \sqrt{1 + \delta}$, $\delta - \acute{o} + 2 = 0$, $\acute{o} = 1$, $\acute{o} = 0$.
11. $\iint_D \acute{o} \delta^2 dx dy$, $D: \acute{o} = \sqrt{\delta}$, $\acute{o} = \delta^3$, $\delta = -1$.
12. $\iint_D \sqrt[3]{\delta}(\acute{o} - \delta) dx dy$, $D: \acute{o} = 2\delta$, $\acute{o} = -\delta$, $\delta = 1$.
13. $\iint_D \sqrt[3]{\acute{o}} \cdot \delta dx dy$, $D: \acute{o} = \delta$, $\delta + \acute{o} - 2 = 0$, $\acute{o} = 0$.
14. $\iint_D \delta(\sqrt{\acute{o}} - 1) dx dy$, $D: \acute{o} = \sqrt{\delta + 1}$, $\acute{o} = 0$, $\delta = 0$.
15. $\iint_D (\acute{o} - \delta) dx dy$, $D: \acute{o} = -\delta^3$, $\acute{o} = -\sqrt{-\delta}$, $\delta = -1$.
16. $\iint_D \delta^2 \acute{o} dx dy$, $D: \acute{o} = \delta$, $\acute{o} = -\delta^2$, $\delta = 1$.
17. $\iint_D \sqrt{\acute{o}}(\delta + \acute{o}) dx dy$, $D: \acute{o} = 3\delta$, $\delta + \acute{o} = 4$, $\acute{o} = 0$.
18. $\iint_D (\delta + 5) \acute{o}^2 dx dy$, $D: \acute{o} = \delta^2 + 1$, $\delta = 1$, $\delta = 0$, $\acute{o} = 1$.
19. $\iint_D (2\delta + \acute{o}) \acute{o} dx dy$, $D: \acute{o} = -\delta$, $\acute{o} = 2\delta$, $\delta = -1$.
20. $\iint_D (\delta^2 + \acute{o}) dx dy$, $D: \acute{o} = -\sqrt[3]{-\delta}$, $\acute{o} = -\delta^2$, $\delta = -1$.

21. $\iint_D \delta^2 \delta dx dy$, $D: \delta = \sqrt{2 - \delta}$, $\delta = \delta^2$, $\delta = 0$, $\delta = 1$.
22. $\iint_D \delta(\delta + 3) dx dy$, $D: \delta = \sqrt{-\delta}$, $\delta = \delta$, $\delta = -1$.
23. $\iint_D \sqrt[3]{\delta}(\delta^2 - \delta) dx dy$, $D: \delta = \delta$, $\delta + \delta = 4$, $\delta = 0$.
24. $\iint_D (\delta - 3)\delta^2 dx dy$, $D: \delta = \sqrt{2 - \delta}$, $\delta = \delta$, $\delta = 0$.
25. $\iint_D (\delta^2 + \delta) dx dy$, $D: \delta = \delta^3 + 1$, $\delta = 1$, $\delta = 0$, $\delta = 0$.
26. $\iint_D \delta \sqrt{\delta} dx dy$, $D: \delta = \delta^2$, $\delta = -\delta$, $\delta = 1$.
27. $\iint_D (\delta + \delta^2) dx dy$, $D: \delta = -\sqrt{-\delta}$, $\delta = -\delta$, $\delta = -1$.
28. $\iint_D (\delta + 3\delta) \delta dx dy$, $D: \delta = \sqrt{-\delta}$, $\delta = 1$, $\delta = 0$.
29. $\iint_D \sqrt{\delta} \delta dx dy$, $D: \delta = \sqrt{4 - \delta}$, $\delta - 2\delta - 4 = 0$, $\delta = 0$.
30. $\iint_D (\delta - \delta^3) dx dy$, $D: \delta = -\sqrt{-\delta}$, $\delta = -1$, $\delta = 0$.

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

- $(x - 2)^2 + y^2 \geq 4$, $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$.
- $x^2 + y^2 - 6x = 0$, $y \leq 0$, $y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
- $(x - 1)^2 + y^2 \geq 1$; $x^2 + (y + 1)^2 \leq 1$.
- $x^2 + y^2 + 4y = 0$, $x \leq 0$, $x^2 + y^2 + 2y = 0$, $y \leq \sqrt{3}x$.

5. $(x+2)^2 + y^2 \geq 4, x^2 + (y+2)^2 \leq 4.$
6. $x^2 + y^2 + 8x = 0, y \geq 0, y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, x^2 + y^2 + 4x = 0.$
7. $(x+3)^2 + y^2 \leq 9, x^2 + (y-3)^2 \geq 9.$
8. $x^2 + y^2 - 6y = 0, x \leq 0, x^2 + y^2 - 4y = 0, y \geq -\sqrt{3}x.$
9. $(x-4)^2 + y^2 \leq 16, x^2 + (y-4)^2 \geq 16.$
10. $x^2 + y^2 - 4x = 0, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x = 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x.$
11. $(x-3)^2 + y^2 \leq 9, x^2 + (y+3)^2 \geq 9.$
12. $x^2 + y^2 + 10y = 0, x \geq 0, x^2 + y^2 + 6y = 0, y \leq -\sqrt{3}x.$
13. $(x+1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y+1)^2 \geq 1.$
14. $x^2 + y^2 + 4x = 0, y \leq 0, x^2 + y^2 + 6x = 0, y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x.$
15. $(x+4)^2 + y^2 \geq 16, x^2 + (y-4)^2 \leq 16.$
16. $x^2 + y^2 - 4x = 0, y \leq 0, x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0, y \geq -x, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x.$
17. $x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0.$
18. $x^2 + y^2 - 2y = 0, x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0, y \geq x, y \geq -\sqrt{3}x.$
19. $x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \sqrt{3}x, y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$
20. $x^2 + y^2 + 4x = 0, y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, y \geq x, x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0.$
21. $x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2y \leq 0.$
22. $x^2 + y^2 + 2y = 0, y \leq -\sqrt{3}x, y \leq x, x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0.$

23. $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, y \leq -\sqrt{3}x, y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
24. $x^2 + y^2 - 6x = 0, y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}, y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.
25. $x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + 2x \leq 0$.
26. $x^2 + y^2 - 8y = 0, y \geq x, y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$.
27. $x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 16, y \leq \sqrt{3}x, y \leq -x$.
28. $x^2 + y^2 + 8x = 0, y \leq -\sqrt{3}x, y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$.
29. $x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + 2y \leq 0$.
30. $x^2 + y^2 + 6y = 0, y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, y \leq x, x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$.

Задача 5. Вычислите интегралы, используя полярные координаты.

1. $\iint_D x dx dy,$ $D: 2x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, y \geq -x$	2. $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy,$ $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0$
3. $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$ $D: x^2 + y^2 \leq 9$	4. $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy,$ $D: x^2 + y^2 \leq 16$
5. $\iint_D y dx dy,$ $D: 2y \leq x^2 + y^2 \leq 6y, y \geq x$	6. $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy,$ $D: (x-2)^2 + y^2 \leq 4$

7. $\iint_D \frac{dxdy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$	8. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \geq 0, x \leq 0$
9. $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy$, $D: x^2 + (y - 2)^2 = 4, y \geq x$	10. $\iint_D x dxdy$, $D: -4y \leq x^2 + y^2 \leq -8y, 0 \leq -x$
11. $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$, $D: (x - 4)^2 + y^2 \leq 16$	12. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, y \geq -\sqrt{3}, y \geq x$
13. $\iint_D \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$, $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \leq -x$	14. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, y \leq x, y \geq 0$
15. $\iint_D y dxdy$, $D: -6y \leq x^2 + y^2 \leq -8y, y \geq -x$	16. $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$, $D: x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$
17. $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$, $D: x^2 + y^2 \leq 25, y \leq 0$	18. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, $D: x^2 - 2x + y^2 = 0, y \geq 0$
19. $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$, $D: x^2 + y^2 + 4y = 0, x \leq 0$	20. $\iint_D x dy dy$, $D: 4y \leq x^2 + y^2 \leq 10y, y \geq x$

21. $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy,$ $D: (x-3)^2 + y^2 \leq 9$	22. $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy,$ $D: x^2 + y^2 \leq 25$
23. $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$ $D: x^2 - 4x + y^2 = 0, y \leq 0$	24. $\iint_D y^2 x dx dy,$ $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, y \leq -\sqrt{3}x$
25. $\iint_D y dx dy,$ $D: -4x \leq x^2 + y^2 \leq 12x,$ $y \leq -x$	26. $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy,$ $D: x^2 + (y+4)^2 \leq 16$
27. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$ $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$	28. $\iint_D xy dx dy,$ $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, y \leq -x$
29. $\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy,$ $D: (x+2)^2 + y^2 = 4,$ $y \geq -\sqrt{3}x$	30) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$ $D: x^2 + y^2 - 2y = 0, x \leq 0$

Глава II

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть в замкнутой области $V \in R^3$ определена и непрерывна функция $u = f(x, y, z)$. Разобьем область V произвольным образом на n областей $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. В каждой частичной области ΔV_i выберем произвольную точку $M_i(\delta_i, \acute{o}_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(\delta_i, \acute{o}_i, z_i) \Delta V_i.$$

Если существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа n при стремлении к нулю наибольшего из диаметров областей ΔV_i ($d_i \rightarrow 0$), то его называют **тройным интегралом** от функции $u = f(\delta, \acute{o}, z)$ по области V и обозначают

$$\iiint_V f(M) dV \quad \text{или} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Здесь $dV = dx dy dz$ - элемент объема.

Если функция $u = f(\delta, \acute{o}, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V , то предел интегральной суммы I_n при $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$ существует и не зависит ни от способов

разбиения области V на части, ни от способа выбора точек $M_i(\tilde{o}_i, \acute{o}_i, z_i)$ в них.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

$$1. \iiint_V \tilde{N}f(x, y, z)dV = \tilde{N} \iiint_V f(x, y, z)dV, \tilde{N} - \text{const}.$$

$$2. \iiint_V (f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z))dV = \\ = \iiint_V f_1(x, y, z)dV \pm \iiint_V f_2(x, y, z)dV.$$

$$3. \iiint_V f(x, y, z)dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z)dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z)dV, \\ \text{если } V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

$$4. \iiint_V dV = V, \text{ так как если } f(x, y, z) = 1 \text{ интегральная}$$

сумма имеет вид $\sum_{k=1}^n \Delta V_k = V$ и численно равна объему

тела.

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

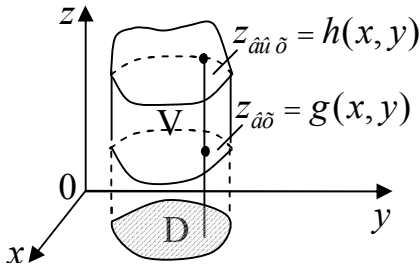


Рис. 20

Если область V (рис.20) такова, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку этой области параллельно оси Oz , пересекает ее границу в двух точках, то тройной интеграл можно вычислить по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x, y, z) dz, \quad (12)$$

где D – проекция области V на плоскость Oxy ; $z = g(x, y)$, $z = h(x, y)$ – уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область V .

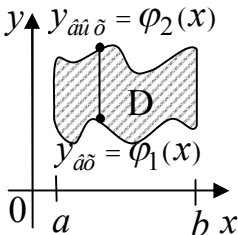


Рис. 21

ограничивающих область V .

Если область D ограничена линиями $\tilde{\delta} = a$, $\tilde{\delta} = b$ ($a < b$), $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$,

$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ (рис.21), то для вычисления тройного интеграла получаем формулу

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(\delta)}^{\varphi_2(\delta)} dy \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz} \quad (13)$$

В частности, если область V представляет собой прямоугольный параллелепипед, определяемый условиями: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $m \leq z \leq n$, то тройной интеграл сводится к трем определенным интегралам

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x, y, z) dz} \quad (14)$$

Порядок интегрирования в формулах (12), (13), (14) может быть другим.

Пример 12. Вычислить интеграл $I = \iiint_V x dx dy dz$, где V -

тетраэдр, ограниченный плоскостями $2\delta + 3\acute{o} + 4z = 12$, $z = 0$, $\acute{o} = 0$, $\delta = 0$ (рис.22).

◀ Плоскость $2\delta + 3\acute{o} + 4z = 12$ отсекает на координатных осях Ox , Oy , Oz соответственно отрезки $a = 6$, $b = 4$, $\tilde{n} = 3$. Проекцией тела V на плоскость Oxy является треугольник OAB (область D) (рис.23).

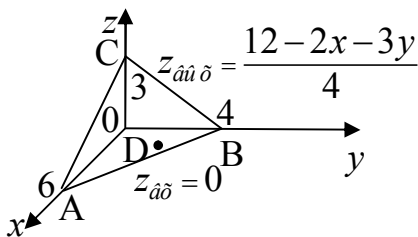


Рис. 22

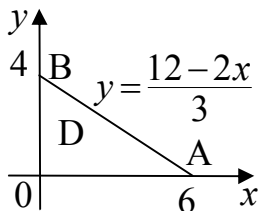


Рис. 23

Найдем пересечение плоскости $2\delta + 3\acute{o} + 4z = 12$ с координатной плоскостью Oxy , полагая $z = 0$. Получаем уравнение прямой AB : $2\delta + 3\acute{o} = 12$. Отсюда $\acute{o} = \frac{12 - 2\delta}{3}$.

Таким образом, имеем область D :
$$\begin{cases} 0 \leq \delta \leq 6, \\ 0 \leq \acute{o} \leq \frac{12 - 2\delta}{3}. \end{cases}$$

Из уравнения плоскости $2\delta + 3\acute{o} + 4z = 12$ получаем $z_{\hat{a}\hat{u}\hat{\delta}} = \frac{12 - 2x - 3y}{4}$. Используя формулу (14), последовательно находим

$$I = \iiint_V x dx dy dz = \int_0^6 \delta dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^6 \tilde{\omega} dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \left(z \sqrt[4]{\frac{12-2x-3y}{0}} \right) dy = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^6 \tilde{\omega} dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (12-2x-3y) dy.
\end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{12-2x}{3}} (12-2x-3y) dy = (12y - 2xy - \frac{3}{2}y^2) \Big|_{\acute{o}=0}^{\acute{o}=\frac{12-2x}{3}} = \\
&= 4 \cdot (12-2x) - \frac{2x(12-2x)}{3} - \frac{3(12-2x)^2}{18} = \frac{2}{3}x^2 - 8x + 24.
\end{aligned}$$

Вычислим внешний интеграл

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4} \int_0^6 x \left(\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^6 \left(\frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 24x \right) dx = \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{6} - \frac{8x^3}{3} + 12x^2 \right) \Big|_0^6 = 18. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

§ 2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В цилиндрической системе координат положение точки М определяется координатами r, φ, z (рис.24).

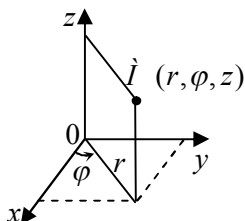


Рис. 24

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми координатами следующими формулами:

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (15)$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Элемент объема

$$dV = dx dy dz = r dr d\varphi dz. \quad (16)$$

Поэтому формула перехода от тройного интеграла в прямоугольных координатах к интегралу в цилиндрических координатах имеет вид

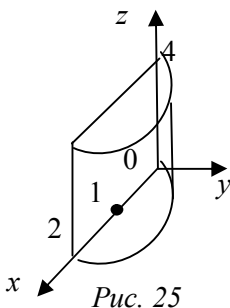
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz, \quad (17)$$

где V^* - данная область в цилиндрических координатах.

Пример 13. Вычислить $I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где область

V ограничена поверхностью $V: \tilde{\rho}^2 + \rho^2 = 2\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho} \geq 0$) и плоскостями $\tilde{\rho} = 0$, $z = 0$, $z = 4$.

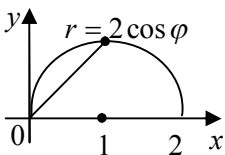
◀ Уравнение поверхности $\delta^2 + \delta^2 = 2\delta$ запишем в виде $(\delta-1)^2 + \delta^2 = 1$. Данное тело V – половинка кругового цилиндра с образующими, параллельными оси Oz (рис.25).



Запишем уравнение поверхности в цилиндрической системе координат, используя формулы (15).

Получим $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2r \cos \varphi$. Отсюда $r = 2 \cos \varphi$. Проекция тела V в плоскости Oxy – полукруг (рис.26). Вычислим интеграл в цилиндрических координатах.

Имеем



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr \int_0^4 z \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} dz =$$

Рис. 26

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr \int_0^4 z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^4 = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr .$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_0^{2 \cos \varphi} r^2 dr = \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} = \frac{8 \cos^3 \varphi}{3} .$$

Наконец получаем

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{64}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{9}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

§ 3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В сферической системе координат положение точки определяется координатами r , φ , θ (рис. 27).

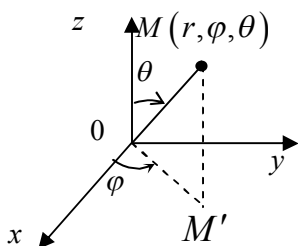


Рис. 27

Формулы перехода к сферическим координатам:

$$\begin{cases}
 \tilde{x} = r \sin \theta \cos \varphi, \\
 y = r \sin \theta \sin \varphi, \\
 z = r \cos \theta.
 \end{cases} \quad (18)$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Элемент объема

$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (19)$$

Для того, чтобы тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ преобразовать к сферическим координатам, надо x , y , z в подынтегральной функции (12) заменить по формулам (18), а элемент

объема dV – по формуле (19). После этого вычислить его тремя последовательными интегрированиями.

Переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар. Запишем уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах. С учетом формул (18) получим:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2 \end{aligned}$$

то есть $r^2 = R^2$. Отсюда уравнение сферы: $r = R$.

Пример 14. Вычислить $I = \iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dV$,

где V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (рис.28).

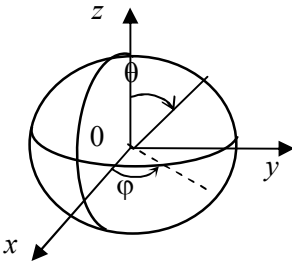


Рис. 28

◀ Переходя в интеграле I к сферическим координатам по формулам (18), (19), последовательно получаем

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \sqrt{1 + r^3} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + r^3} r^2 dr . \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл.

$$\int_0^1 \sqrt{1+r^3} r^2 dr = \frac{1}{3} \int_0^1 (1+r^3)^{\frac{1}{2}} d(1+r^3) = \frac{1}{3} (1+r^3)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{9} (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$I = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1) \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{9} (2\sqrt{2} - 1) \cdot 2\pi = \frac{8\pi(2\sqrt{2} - 1)}{9}. \blacktriangleright$$

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Таблица 2.

Приложение тройных интегралов в геометрии и механике

№	Наименование	Общая формула	Прямоугольные координаты	Цилиндрические координаты	Сферические координаты
1	Объем тела	$V = \iiint_V dV$	$V = \iiint_V dx dy dz$	$V = \iiint_V r dr d\varphi dz$	$V = \iiint_V r^2 \sin \theta dz d\varphi d\theta$
2	Масса тела с плотностью ρ	$m = \iiint_V \rho dV$	$m = \iiint_V \rho dx dy dz$	$m = \iiint_V \rho r dr d\varphi dz$	$m = \iiint_V \rho r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$
3	Момент инерции тела относительно оси Oz	$I_z = \iiint_V r^2 dV$	$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$	$I_z = \iiint_V r^3 dr d\varphi dz$	$I_z = \iiint_V r^4 \sin \theta dr d\varphi d\theta$
4	Координаты центра тяжести однородного тела	$x_{\bar{n}} = \frac{\iiint_V x dV}{V}$ $y_{\bar{n}} = \frac{\iiint_V y dV}{V}$ $z_{\bar{n}} = \frac{\iiint_V z dV}{V}$	$x_{\bar{n}} = \frac{\iiint_V x dx dy dz}{V}$ $y_{\bar{n}} = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{V}$ $z_{\bar{n}} = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{V}$		

Пример 15. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$, $z = 4 - \delta$ (рис.29).

◀ Воспользуемся формулой 1 таблицы 2. Проекция тела в плоскости Oxy изображена на рис.30.

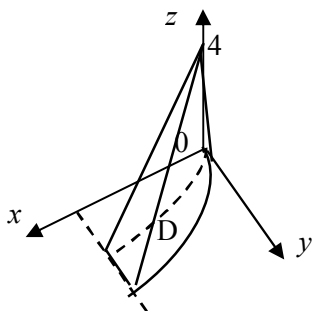


Рис.29

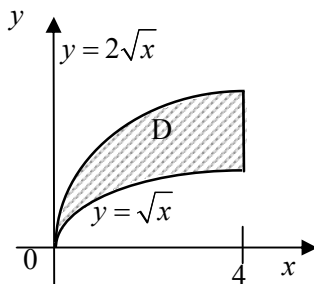


Рис.30

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{4-x} dz = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(z \Big|_0^{4-x} \right) dy = \\
 &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy = \int_0^4 (4-x) dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 (4-x) \left(y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \right) dx = \\
 &= \int_0^4 (4-x) \sqrt{x} dx = \int_0^4 \left(4x^{1/2} - x^{3/2} \right) dx = \left(4x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - x^{5/2} \cdot \frac{2}{5} \right) \Big|_0^4 = \\
 &= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}.
 \end{aligned}$$

Пример 16. Найти массу тела (рис.31), ограниченного цилиндрической поверхностью $\delta^2 = 2\delta$ и плоскостями $z=0$, $2\delta+z=2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна ординате этой точки.

◀ По условию плотность $\rho(\delta, \delta, z) = y$, по формуле 2 таблицы 2 масса тела равна:

$$m = \iiint_V y dx dy dz .$$

Проекция тела в плоскости Oxy изображена на рис.32. Тело симметрично относительно плоскости Oxy . Поэтому

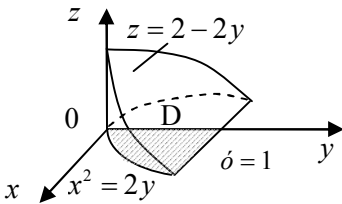


Рис.31

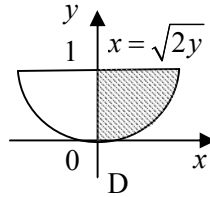


Рис.32

$$\begin{aligned} m &= 2 \int_0^1 y dy \int_0^{\sqrt{2y}} dx \int_0^{2-2y} dz = 2 \int_0^1 y dy \int_0^{\sqrt{2y}} z \Big|_0^{2-2y} dx = \\ &= 2 \int_0^1 y dy \int_0^{\sqrt{2y}} (2-2y) dx = 2 \int_0^1 y(2-2y) dy \int_0^{\sqrt{2y}} dx = 4 \int_0^1 (y-y^2) \sqrt{2y} dy = \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^1 (y^{3/2} - y^{5/2}) dy = 4\sqrt{2} \left(y^{5/2} \cdot \frac{2}{5} - y^{7/2} \cdot \frac{2}{7} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) = \frac{16\sqrt{2}}{35} . \end{aligned}$$

Пример 17. Вычислить объем, координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$ (рис.33).

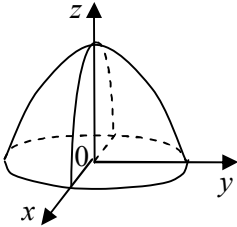


Рис.33

◀ Вычислим объем тела в цилиндрических координатах по формуле 1 таблицы 2:

$$V = \iiint_V r dr d\varphi dz.$$

Уравнение параболоида в цилиндрических координатах с помощью формул (15) примет вид $z = 3 - r^2$.

Проекцией тела в плоскости Oxy служит круг $\delta^2 + \delta^2 = 3$, радиус которого $R = \sqrt{3}$. Поэтому

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{3-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3) dr = 2\pi \cdot \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Для определения центра тяжести тела воспользуемся формулой из таблицы 2.

Так как тело симметрично, то центр его тяжести лежит на

$$\text{оси } Oz, \text{ поэтому } x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{\iiint_V z dV}{V}.$$

Вычислим интеграл $\iiint_V z dV$ в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned}
\iiint_V z dV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{3-r^2} z dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{3-r^2} \right) r dr = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3-r^2)^2 r dr = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (9r - 6r^3 + r^5) dr = \\
&= \pi \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{3r^4}{2} + \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Тогда $z_c = 1$.

§ 5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Вычислить тройной интеграл

1. $\iiint_V (x - 2y^2 + xz) dx dy dz,$ $V: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 3$	2. $\iiint_V (x + 4\delta z + y^2) dx dy dz,$ $V: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 3$
3. $\iiint_V (x - y + 3yz) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 3$	4. $\iiint_V (2xy^2 - xz + z^3) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$
5. $\iiint_V (xy - 3y^2 - z^2) dx dy dz,$ $V: -3 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$	6. $\iiint_V (x - 2yz + 3z^2) dx dy dz,$ $V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2$
7. $\iiint_V (2xz^2 - y^2 - z) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$	8. $\iiint_V (4xy^3 + y - 2z^2) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, -1 \leq z \leq 2$
9. $\iiint_V (x^2 - 2xz^2 + y^3) dx dy dz,$ $V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 1$	10. $\iiint_V (3x^2 - xy + 2z^2) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4, -1 \leq z \leq 2$
11. $\iiint_V (2xz + yz^2 - z^3) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2$	12. $\iiint_V (x + 4xz - y^2) dx dy dz,$ $V: -1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 3$
13. $\iiint_V (2 + x^3 - yz) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$	14. $\iiint_V (2x - 3y + z^2) dx dy dz,$ $V: -3 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4$
15. $\iiint_V (x^2 + yz - 2z^2) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$	16. $\iiint_V (x + 2xy - z^2) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$

$V: -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2$	$V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$
17. $\iiint_V (4x - y^2 + yz) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$	18. $\iiint_V (2x^2 + xz - 3y) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 3$
19. $\iiint_V (x - 2yz^2 + 4y) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$	20. $\iiint_V (3x + yz^2 - 5) dx dy dz,$ $V: -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$
21. $\iiint_V (x^2 y - 3y + z) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$	22. $\iiint_V (2x + x^2 z - y^2) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 3$
23. $\iiint_V (x - 4y^2 + 3xz^2) dx dy dz,$ $V: 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$	24. $\iiint_V (3x + xy - z^3) dx dy dz,$ $V: 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$
25. $\iiint_V (x - z^3 + 2) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$	26. $\iiint_V (4xy^2 - y + 3z) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$
27. $\iiint_V (2x - y + 3z^2) dx dy dz,$ $V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$	28. $\iiint_V (3x + yz^2 - 4) dx dy dz,$ $V: 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3$
29. $\iiint_V (xz^2 - 2y^3 + 3) dx dy dz,$ $V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$	30. $\iiint_V (4x + y - 2yz^2) dx dy dz,$ $V: 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

Задача 2. Вычислить тройной интеграл, если область V ограничена указанными поверхностями

1. $\iiint_V (2x + y) dx dy dz, V : x = 1, y = 2x, y = 3x, z \leq 0, z = x^2 + y^2 - 4.$

2. $\iiint_V x dx dy dz, V : x = 0, y = 0, x + y = 1, z \geq 0, z = 4 - x^2 - y^2.$

3. $\iiint_V (1 + x) dx dy dz, V : x = 0, y = 0, x + y + z = 1, z = 0.$

4. $\iiint_V (x + 2y - z) dx dy dz, V : x = 0, y = 0, x + y = 3, z = 0, z = 4.$

5. $\iiint_V y dx dy dz, V : x = 4, y = 0, y = \sqrt{x}, z = 0, z + y = 1.$

6. $\iiint_V z dx dy dz, V : x = 3, y = x, y = 2x, z \geq 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

7. $\iiint_V (x + 2) dx dy dz, V : x = 0, y = 4, y = x^2, z = 0, y + z = 3.$

8. $\iiint_V xz dx dy dz, V : x = 0, x = 2, y = 1, y = 3, z = 4 - x^2.$

9. $\iiint_V x^2 dx dy dz, V : x = 0, y = 0, x + y + z = 4, z = 0.$

10. $\iiint_V (x + 1) dx dy dz, V : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 3, z = 9 - x^2 - y^2.$

11. $\iiint_V (y - 1) dx dy dz, V : y = x, y = -x, y = 2, z \geq 0, z = 2(x^2 + y^2).$

12. $\iiint_V yz dx dy dz, V : x = 0, x = 3, y = 0, y = 2, z = 4 - y^2.$

13. $\iiint_V z dx dy dz, V : x = 0, x = \frac{1}{2}, y = x, y = 2x, z = 0, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$
14. $\iiint_V xyz dx dy dz, V : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x = 0, y = 0, z = 0.$
15. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}, V : x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$
16. $\iiint_V (3x + y) dx dy dz, V : y = 2x, y = \sqrt{x}, z = 0, z = 4.$
17. $\iiint_V (x - yz) dx dy dz, V : y = x, x = 4, z = 0, z = 2x^2 + y^2.$
18. $\iiint_V (2x - z) dx dy dz, V : x = 0, x = 2, y = 0, y = 1, z = 5 - y^2.$
19. $\iiint_V y dx dy dz, V : y = x^2, x = 0, y = 4, z = 0, z = 4 - y.$
20. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + 2)^2}, V : x = -1, x = 1, y = 0, y = 2, z = 3 - y^2.$
21. $\iiint_V xy dx dy dz, V : x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y + z = 6.$
22. $\iiint_V z dx dy dz, V : y = 0, y = 3, z = 4 - x^2, z = 0.$
23. $\iiint_V (x + y^2) dx dy dz, V : x = -2, x = 2, y = 0, y = 1, z = 0, z = 2x^2.$
24. $\iiint_V (2x + z) dx dy dz, V : y = \sqrt{x}, y = x^2, z = 0, z = 5 - x^2.$
25. $\iiint_V yz dx dy dz, V : x = 0, y = 0, x = 2, y = 3, 4x^2 + z^2 = 16.$

26. $\iiint_V (x+2y)z dx dy dz, V : x=0, y=0, x=3, y=4, z^2-x^2=4.$
27. $\iiint_V (2x-yz) dx dy dz, V : y=x, y=3x, x=1, y=4, z=5-2x.$
28. $\iiint_V (3x+y) dx dy dz, V : x=-1, x=1, y=0, y=2, z=9-x^2.$
29. $\iiint_V (x-2y+z) dx dy dz, V : y=x^2, y=2x, z=2x^2+3.$
30. $\iiint_V (x+y+2z) dx dy dz, V : y=-x, y=x, y=2, z=6-x^2.$

Задача 3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

1. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz,$ $V : x^2+y^2 \leq z^2, z \leq 1$	2. $\iiint_V z^2 dx dy dz,$ $V : z = x^2+y^2, z \leq 4$
3. $\iiint_V (x^2-y^2) dx dy dz,$ $V : x^2+y^2 \leq 2z, z \leq 2$	4. $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^3 dx dy dz,$ $V : x^2+z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
5. $\iiint_V x^2 dx dy dz,$ $V : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, y \geq 0,$ $z \geq 0$	6. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dx dy dz,$ $V : y=0, y=\sqrt{4-x^2}; 0 \leq z \leq 3$
7. $\iiint_V \cos \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz,$	8. $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz,$ $V : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2,$

$V : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2},$ $1 \leq z \leq 2$	
9. $\iiint_V y dx dy dz,$ $V : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \leq \sqrt{3}x,$ $y \geq 0, z \geq 0,$	10. $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ $V : x^2 + y^2 = 4y, x^2 + y^2 = 6y,$ $x \geq 0, z \geq 0, z = 4,$
11. $\iiint_V y dx dy dz,$ $V : x^2 + y^2 + z^2 = 8, z^2 = x^2 + y^2$	12. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$ $V : x^2 + y^2 = 4x, y + z = 4$
13. $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$ $V : x^2 + y^2 = 2y, x \geq 0, z = 0,$ $z = 2$	14. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ $V : x^2 + y^2 = 2x, z = 9 - x^2,$ $z = 0$
15. $\iiint_V \frac{xdx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ $V : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0,$ $y \geq 0, z \geq 0$	16. $\iiint_V y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$ $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$
17. $\iiint_V (x + 2y) dx dy dz,$ $V : z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$	18. $\iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$ $V : y \geq 0, y \leq x, z = 4(x^2 + y^2)$
19. $\iiint_V xy dx dy dz,$ $V : y \geq 0, z^2 = x^2 + y^2, z = 4$	20. $\iiint_V (x^2 - 2y^2) dx dy dz,$ $V : z = 9 - x^2 - y^2, z = 0,$

21. $\iiint_V (y+z) dx dy dz$, $V: x^2 + 4x + y^2 = 0, z = 1, z = 2$	22. $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}$, $V: x \geq 0, z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$
23. $\iiint_V (2x - y) dx dy dz$, $V: x^2 + y^2 + 2y = 0, z = 0, z = 3$	24. $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$
25. $\iiint_V (x - y) dx dy dz$, $V: 2z = x^2 + y^2, z \geq 0$	26. $\iiint_V (x - z) dx dy dz$, $V: z = 3 - x^2 - y^2, z = 0, y \geq 0$
27. $\iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$, $V: x^2 + 6x + y^2 = 0, z = 0, z = 2$	28. $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq x, z \geq 0$
29. $\iiint_V (2x - y) dx dy dz$, $V: z^2 = x^2 + y^2, z = 3$	30. $\iiint_V (x + 3y) dx dy dz$, $V: x^2 + 4x^2 + y^2 = 0, y \leq 0, z = 0, z = 4$

Задача 4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

- $y^2 = x, x = 4, z = 0, z + y = 5$;
- $x - 2y + 2 = 0, x + y - 7 = 0, z = x^2, z \geq 0$;
- $y = x^2, y = x, z = 4 - y^2, z \geq 0$;

4. $x + 2y = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z = x^2 + 2y^2$;
5. $y = x^2 - 1, y = 3, z = x^2 + y^2 + 2, z \geq 0$;
6. $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z = 4$;
7. $x = y^2, x = 4, 2y + z = 6, z \geq 0$;
8. $y = \sqrt{4 - x^2}, z = 3y, z \geq 0, \acute{o} = 0$;
9. $z = 9 - y^2, x^2 + y^2 = 1, z \geq 0$;
10. $x + y = 3, z = x^2 + 2y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
11. $y = x, y = -x, y = 1, z = 5 - x^2, z = 0$;
12. $z = y^2 - 4, 0 \leq x \leq 1, z \leq 0$;
13. $y = x, y = 2x, y = 2, z = x^2 + y^2, z = 4$;
14. $z = x^2 - 1, 1 \leq y \leq 4, z \leq 0$;
15. $y = x^2, y = 2x^2, x = 2, z = 0, z = 3$;
16. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4, z = 0, z = 2$;
17. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2$;
18. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z$;
19. $2x - y = 0, x + y = 6, x = 0, z = 0, z = x^2$;
20. $y = x^2 + 2, y = 6, z = 0, z = 3$;
21. $y = 4 - x^2, y = 0, z = 5 - x, z = 0$;
22. $2y = x^2 + z^2, x + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$;
23. $z = 0, y = 0, x = 4, x^2 = y^2 + z^2$;
24. $x^2 + z^2 = 4, y = x^2 + z^2, y \geq 0$;
25. $x^2 + y^2 = 1; z = 6 - x - y, z \geq 0$;

$$26. y = 8 - x - z, x^2 + z^2 = 4, y \geq 0;$$

$$27. x = 0, z = 0, y = 2, y^2 = x^2 + z^2;$$

$$28. y^2 + z^2 = 9, x = y^2 + z^2, x \geq 0;$$

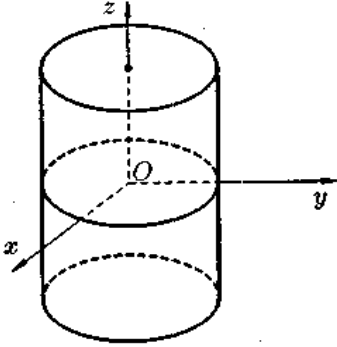
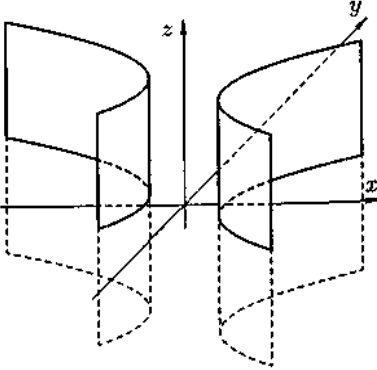
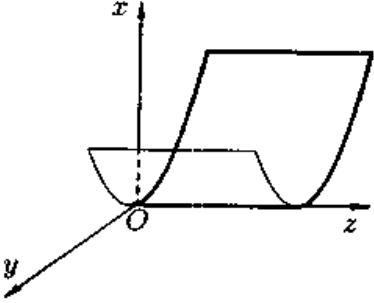
$$29. x = 4 - y - z, y^2 + z^2 = 1, \delta \geq 0;$$

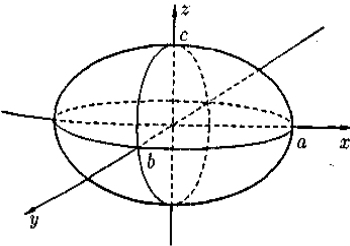
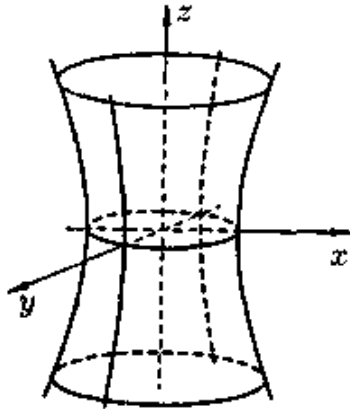
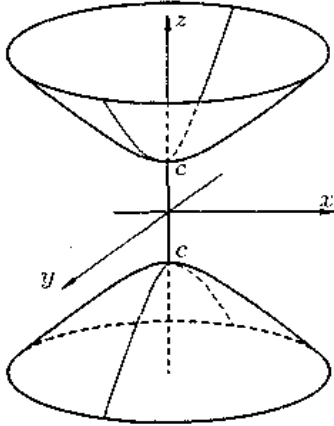
$$30. \tilde{o}^2 + z^2 = 16, \acute{o} = \tilde{o}^2 + z^2, \acute{o} \geq 0;$$

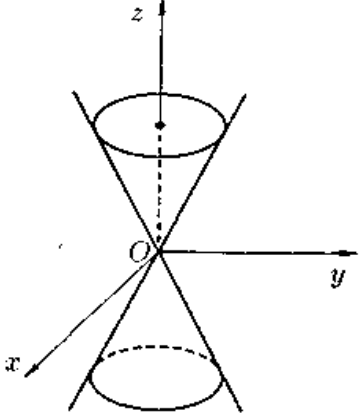
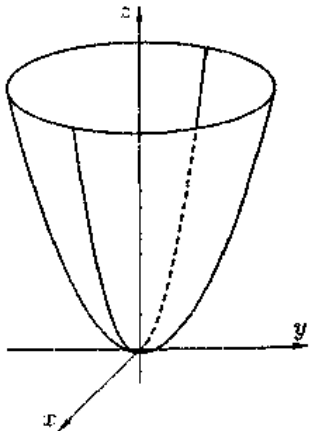
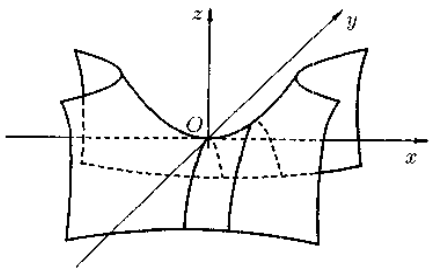
Приложение

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Цилиндром второго порядка называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является эллипс (окружность), гипербола или парабола.

Название	<p><i>Цилиндром второго порядка</i> называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является эллипс (окружность), гипербола или парабола.</p>		
	1. Эллиптический цилиндр	2. Гиперболический цилиндр	3. Параболический цилиндр
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2qx$
Чертеж			

Название	ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА		
	4. Эллипсоид	5. Однополостной гиперболоид	6. Двуполостной гиперболоид
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Чертеж			

<p>Название</p>	<p>7. КОНУС</p>	<p>8. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД</p>	<p>9. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД</p>
<p>Уравнение</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$
<p>Чертеж</p>			

Литература

1. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К.Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.
2. Каплан, И.А. Практические занятия по высшей математике. ч. IV / И.А. Каплан. – Харьков: Харьковский гос. университет – 1966. – 236 с.
3. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. (Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука. – 1981. – 368 с.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах.ч.2 / П.Е. Данко, А.Г. Попова, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высш.шк.,1999 - 416 с.

Учебное издание

Апайчева Любовь Алексеевна
кандидат физико-математических наук, доцент

Шувалова Людмила Егоровна
старший преподаватель

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 02.04.2014
Подписано в печать 19.04.2014.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,5. Тираж 100.
Заказ №16.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».
г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а.