Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Э.Р. Галеев, В.В. Елизаров, В.И. Елизаров

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Нижнекамск
2012

УДК 519.8
Г 15

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Латыпов Д.Н., кандидат технических наук, доцент;
Саримов Н.Н., кандидат физико-математических наук.

Галеев, Э.Р.
Г 15 Теория принятия решений : методические указания для студентов заочной формы обучения / Э. Р. Галеев, В. В. Елизаров, В. И. Елизаров. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2012. – 56 с.

Методические указания соответствуют государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория принятия решений» направлений бакалаврской подготовки 220400 «Управление в технических системах», 230100 «Информатика и вычислительная техника».

Приведены программа курса, контрольные и тестовые задания, а также методические указания к выполнению заданий по следующим разделам: линейное программирование, нелинейное программирование, принцип максимума, динамическое программирование, основная задача управления, многокритериальная оптимизация.

Предназначены для студентов заочной формы обучения факультета управления и автоматизации по направлениям 220400 «Управление в технических системах», 230100 «Информатика и вычислительная техника».

Подготовлены на кафедре автоматизации технологических процессов и производств Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет».

УДК 519.8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория принятия решений – область исследования вопросов выбора человеком рационального решения в технических, экономических, биологических и социальных задачах. При этом объектами исследования, как правило, являются различные системы жизнедеятельности человека, а основной метод исследования – математический.

Важными понятиями теории принятия решений являются:

- критерий эффективности – количественная оценка свойства объекта исследования;
- управление или управляющее воздействие, позволяющее изменять состояние объекта в соответствии с требованиями.

Математичкой формулировкой критерия оптимальности является функция или функционал.

Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y. Переменную x называют независимой переменной или аргументом. Переменную y называют зависимой переменной. Говорят также, что переменная y является функцией от переменной x.

Функционалом же называется переменная величина, которая зависит от выбора функции (кривой). Если каждой функции из некоторого класса поставлено в соответствии определенное число, то говорят задан функционал. Роль независимого переменного в функционалах играют функции (кривые).

Среди многообразия задач теории принятия решений необходимо выделить следующие:

- оптимальная задача: требуется найти наилучшее значение критерия эффективности (критерия оптимальности, функции цели) при соответствующих условиях;
- задача многокритериальной (векторной) оптимизации: необходимо найти наилучшее значение двух и более непротиворечивых и несводимых друг к другу критериев эффективности;

- основная задача управления: требуется найти управление динамической системы, при котором выполняются ограничения на показатели эффективности в виде неравенств;
- задачи управления в условиях неопределенности: поиск управления проводится в условиях неполной или непостоянной информации о параметрах объекта исследования.

Основные методы решения вышеперечисленных задач:

1) методы исследования функций классического анализа,
2) методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа;
3) вариационное исчисление;
4) линейное, нелинейное, динамическое программирование;
5) эквивалентное преобразование задачи;
6) принцип максимума.

Применение методов теории принятия решений весьма целесообразно при разработке автоматизированных систем управления технологических процессов и производств, а также проектировании аппаратов химической технологии.

В рамках изучения курса «Теория принятия решений» студентами заочной формы обучения необходимо освоить программу курса, а также выполнить контрольную работу согласно варианту.

ПРОГРАММА КУРСА

Тема 1. Основные этапы принятия решения [1, 2].

Пример количественного анализа принимаемого решения при сбыте продукции. Функция полезности. Определение размеров риска. Задача с вазами.

Тема 2. Многокритериальная задача теории принятия решений [1, 3].

Показатели функционирования системы. Основная задача управления (ОЗУ). Геометрическая интерпретация ОЗУ.

Тема 3. Эквивалентное преобразование ОЗУ [3].

Сведение двухсторонних неравенств к односторонним. Геометрическая интерпретация построения решения. Условие разрешимости ОЗУ на основе минимакса. Свойства ОЗУ в линейной постановке.

Тема 4. Задачи принятия решений по векторному критерию [4].

Множество решений оптимальных по Парето. Последовательная оптимизация скалярных критериев. Оптимизация на основе компромиссных отношений. Оптимизация, основанная на приближении к идеальному значению.

Тема 5. Понятие оптимизации [2, 5, 6].

Выбор критерия оптимизации. Постановка задачи оптимального управления, математического программирования. Задача о выборе режима печи. Задача о распределении ограниченных ресурсов. Выбор критерия оптимизации.

Тема 6. Нелинейное программирование [5 – 7].

Постановка задачи. Представление целевой функции и ограничений линиями уровня. Методы решения задач нелинейного программирования.

Тема 7. Градиентные методы [5 – 7].

Градиентный метод. Метод наискорейшего спуска решения задач нелинейного программирования.

Тема 8. Безградиентные методы детерминированного поиска [5 – 7].

Метод локализации экстремума. Метод «золотого сечения». Метод сканирования.

Тема 9. Методы случайного поиска [5 – 7].

Слепой поиск. Метод случайных направлений. Алгоритм метода. Методы получения случайных чисел.

Тема 10. Условный экстремум функции [5].

Постановка задачи. Функция Лагранжа. Правило множителей Лагранжа. Оптимальное распределение потоков сырья между параллельно работающими аппаратами.

Тема 11. Линейное программирование [5, 7].

Постановка задачи. Сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Пример решения задачи симплексным методом.

Тема 12. Вариационное исчисление [5].

Предмет вариационного исчисления. Постановка задачи вариационного исчисления. Непрерывность функционалов. Близость функций по расстоянию ρ. Относительный и абсолютный экстремум функционала.

Тема 13. Вариация функционала [5].

Способы вычисления вариации функционала. Необходимое условие относительного экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Простейшая вариационная задача, Уравнение Эйлера.

Тема 14. Принцип максимума [5, 7].

Формулировка принципа максимума в задаче со свободным правым концом. Свойства функции Гамильтона (Н).

Тема 15. Оптимизация многостадийных процессов [5, 8].

Постановка задачи. Принцип оптимальности Беллмана. Математическая формулировка принципа оптимальности для дискретных процессов. Вычислительная процедура метода динамического программирования.

Тема 16. Метод динамического программирования в непрерывной форме [5, 8].

Аналитическое конструирование оптимального регулятора.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа состоит из четырех заданий.

Задание 1 содержит теоретическую часть и выполняется расчетным путем.

Задание 2 содержит теоретическую часть и реализуется в виде программы ЭВМ с использованием языка программирования (Бэйсик, Паскаль и др.) по выбору студента.

Задание 3 содержит теоретическую часть и выполняется расчетным путем.

Задание 4 содержит тестовые вопросы с возможностью выбора одного или нескольких ответов из приведенных.

Контрольная работа оформляется в виде отчета. Отчет содержит расчетную часть (задания 1, 3), блок схему и листинг программы реализуемого метода (задание 2), результаты расчета, результаты тестирования в форме вопрос – ответ.

Отчет оформляется в печатном виде.

ЗАДАНИЕ I.
ПРИМЕНЕНИЕ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Значительное число планово-производственных задач имеет выражение критерия оптимальности в виде линейной функции от входящих в него переменных. При этом на указанные переменные могут быть также наложены некоторые ограничения в форме линейных равенств или неравенств.

Примером подобных задач является задача отыскания такого распределения ограниченного количества сырья между различными производствами, когда общая стоимость получаемой продукции максимальна.

Решение этих задач, математическая формулировка которых сводится к требованию максимизации или минимизации критерия оптимальности, заданного в виде линейной функции независимых переменных с линейными ограничениями на них составляет задачу линейного программирования [2, 5, 7].

В задачах линейного программирования критерий оптимальности представляется в виде

$$R = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \qquad (1.1)$$

где c_j $(j = 1,2,..., n)$ – заданные постоянные коэффициенты, среди которых могут быть и равные нулю.

На значения переменных x_j $(j = 1,2,..., n)$ налагаются дополнительные условия, заданные в виде равенств и неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i , \; i = 1,2,..., m_1 ; \qquad (1.2а)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i , \; i = m_1 + 1, m_1 + 2,..., m_2 ; \qquad (1.2б)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,,\ i = m_2 + 1, m_2 + 2, ..., m\,. \qquad (1.2в)$$

При этом предполагается $x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n)$, т.к. в большинстве экономических задач независимые переменные, имеющие конкретный физический смысл (единицу продукции, цены и т.д.), не могут быть отрицательными величинами.

Будем также считать, что все величины b_i в ограничениях (1.2) отличны от нуля и положительны.

Число ограничений типа равенств $(m - m_2)$ не должно превышать число переменных $x_j \quad (j = 1,2,...,n)$. Общее же число неравенств может быть произвольным.

Коэффициенты a_{ij} в соотношениях (1.2) принимаются действительными числами, положительными или отрицательными, среди которых могут быть и равные нулю.

Оптимальным решением задачи линейного программирования, или как еще называют, оптимальным планом является совокупность неотрицательных значений переменных x_j $(j = 1,2,...,n)$, которая удовлетворяет соотношениям (1.2) и обеспечивает в зависимости от постановки задачи максимальное или минимальное значение линейной функции (1.1).

Сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств

В задачах линейного программирования ограничения типа неравенств могут быть представлены в виде равенств введением новых переменных, называемых дополнительными. Для этого в каждом соотношении (1.2а) прибавим к левой части дополнительную переменную x_{n+i}, которая превращает неравенство в равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \text{ , } i = 1,2,...,m_1 .$$

При этом все дополнительные переменные положительны. Для неравенств (1.2б), можно также записать, учитывая положительность дополнительных переменных

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \text{ , } i = m_1 + 1, m_1 + 2,..., m_2 .$$

Тогда система ограничений (1.2) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = b_i \text{ , } i = 1,2,...,m . \tag{1.3}$$

Любое решение системы уравнений (1.3), состоящее из $n + m$ неотрицательных значений переменных x_j $(j = 1,2,..., n + m)$ называется допустимым решением.

Допустимое решение, в котором m составляющих отличны от нуля называется допустимым базисным решением или планом.

Задача отыскания оптимального решения заключается в переборе только базисных решений системы (1.3).

Процедурой последовательного улучшения плана или построения базисного решения является симплексный метод [2, 5].

Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Симплексный метод позволяет по известному базисному решению построить другое базисное решение, для которого значение линейной формы больше, чем для исходного.

Для вывода основных соотношений симплексного метода запишем систему уравнений (1.3) в векторной форме

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j x_j = B \text{, где } A_j \text{ и } B \text{ – векторы.}$$

$$A_j = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}, \; j = 1,2,...,n+m.$$

Предположим, что известно какое-нибудь базисное решение системы, в котором m значений x_j отличны от нуля

$$x_j = 0, \; j = 1,2,...,n.$$

$$x_j = \lambda_j^{(0)} \neq 0, \; j = n+1, n+2,..., n+m.$$

Ненулевые значения x_j удовлетворяют векторному уравнению

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j \lambda_j^{(0)} = B. \qquad (1.4)$$

Векторы A_j $(j = n+1, n+2,..., n+m)$ могут быть приняты в качестве базиса m-мерного пространства, поэтому любой небазисный вектор A_k $(k = 1,2,...,n)$ можно разложить по векторам базиса

$$A_k = \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{jk}. \qquad (1.5)$$

Умножим уравнение (1.5) на произвольную положительную константу θ и вычтем это уравнение из (1.4).

$$\theta A_k = \theta \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{jk}.$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} A_j \lambda_j^{(0)} - \theta \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{jk} = B - \theta A_k$$

или

$$\theta A_k - \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j \left(\lambda_j^{(0)} - \theta x_{jk}\right) = B. \qquad (1.6)$$

Величина θ – произвольная, поэтому ее выберем настолько малой, что независимо от знака $x_{j,k}$ выражение в скобках будет всегда положительно

$y_j = \lambda_j^{(0)} - \theta x_{jk} > 0$, т.к. $\lambda_j^{(0)} > 0$, $j = n+1,...,n+m$; $k = 1,2,...,n$.

Обозначим $y_k = \theta$, $k = 1,2,...,n$.

При $\theta = 0$ имеем исходное базисное решение. Поэтому для получения другого базисного решения, отличного от исходного, необходимо взять $\theta > 0$.

Если коэффициенты x_{jk} вектора A_k отрицательны, то получить новое базисное решение невозможно. В этом случае вместо вектора A_k следует взять любой другой вектор и разложить его по векторам базиса и т.д. до тех пор пока не будет найдено разложение какого-либо вектора, содержащего хотя бы один положительный коэффициент x_{js}.

Пусть не все x_{jk} $(j = n+1, n+2,...,n+m)$ в разложении вектора A_k отрицательны. Тогда при непрерывном возрастании величины θ от $\theta = 0$ первой обратится в нуль та переменная $y_{n+\ell}$ $(1 < \ell < m)$, для которой отношение $\dfrac{\lambda_{n+1}^{(0)}}{x_{n+1,k}}$ будет минимально среди всех других отношений. Значение θ нужно выбрать равным этому минимальному отношению

$$\theta_{n+\ell,k} = \min_{n+1 \le j \le n+m} \frac{\lambda_j^{(0)}}{x_{jk}} > 0.$$

Допустим, минимальное значение $\dfrac{\lambda_j^{(0)}}{x_{jk}}$ соответствует $\ell = 1$:

$$\theta = \theta_{n+\ell,k} = \frac{\lambda_{n+1}^{(0)}}{x_{n+1,k}} > 0.$$

Тогда при данном θ значение переменной $y_{n+1} = 0$, другие $y_j > 0 \;\; (j = k, n+2, ..., n+m)$.

Поэтому вместо исходного базисного решения получим новое

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_j^{(1)} = 0, j = 1,2,...,n;\\
&\lambda_k^{(1)} = \theta, k = 1,2,...,n.\\
&\lambda_{n+1}^{(1)} = \lambda_{n+1}^{(0)} - \theta x_{n+1,k} = 0.\\
&\lambda_j^{(1)} = \lambda_j^{(0)} - \theta x_{jk} > 0, j = n+2, n+3, ..., n+m.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

На основе нового базисного решения (1.7) уравнение (1.6) будет записано в виде

$$A_k \lambda_k^{(1)} + \sum_{j=n+2}^{n+m} A_j \lambda_j^{(1)} = B. \qquad (1.8)$$

Сравнивая полученное уравнение (1.8) с (1.6), получим, что вектор A_{n+1} заменен на вектор A_k и новое базисное решение (1.7) удовлетворяет уравнению (1.8).

Таким образом, изложенная процедура позволяет находить при известном базисном решении другое базисное решение, отличающееся от исходного одним базисным вектором.

Как же меняется значение критерия оптимальности при переходе от одного базисного решения к другому?

Подставим исходное базисное решение в выражение критерия

$$R^{(0)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} c_j \lambda_j^{(0)}.$$

Число членов под знаком суммы сократилось за счет того, что в исходном базисном решении n членов равно нулю.

Для первого базисного решения значение критерия равно

$$R^{(1)} = \tilde{n}_k \theta + \sum_{j=n+1}^{n+m} c_j \left(\lambda_j^{(0)} - \theta x_{jk}\right).$$

Найдем приращение критерия ΔR

$$\Delta R = R^{(1)} - R^{(0)} = \theta\left(c_k - \sum_{j=n+1}^{m} c_j x_{jk}\right).$$

Величина $\Delta R > 0$, если выполняется условие

$$c_k > \sum_{j=n+1}^{m} c_j x_{j,k} \,. \qquad (1.9)$$

Если же $\Delta R < 0$, то значение критерия уменьшается при переходе к новому базисному решению.

Вопрос о целесообразности перехода к новому базисному решению следует решать проверкой условия (1.9) еще до выбора θ, для чего необходимо знать лишь коэффициенты x_{jk} $(1 \le k \le n)$ в разложении вектора A_k $(1 \le k \le n)$ по векторам базиса A_j $(j = n+1, n+2, ..., n+m)$.

Пример решения задачи симплексным методом

Требуется найти максимальное значение критерия:

$$R = x_1 + 0.5x_2 + x_3 \,. \qquad (1.10)$$

При ограничениях:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 3,$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \le 4,$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 \le 2 \,. \qquad (1.11)$$

Введем дополнительные переменные x_4, x_5, x_6, с помощью которых неравенства (1.11) можно представить в виде равенств

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4,$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_6 = 2 \,. \qquad (1.12)$$

С учетом дополнительных переменных коэффициенты c_j в выражении критерия оптимальности составляют

$c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 1$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

В качестве исходного базисного решения примем решение, соответствующее базису дополнительных переменных, полагая

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$,

$\lambda^{(0)} = (0,0,0,3,4,2)$.

Значение критерия при этом равно нулю

$R^{(0)} = 0$.

Соответствующий этому решению исходный базис образован векторами

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Небазисные векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Разложим небазисный вектор A_1 по векторам базиса

$A_1 = A_4 x_{41} + A_5 x_{51} + A_6 x_{61}$,

где x_{41}, x_{51}, x_{61} – коэффициент разложения, величины положительные.

Коэффициенты разложения находим из системы уравнений, коэффициентами которой являются компоненты базисных векторов, а правые части представляют компоненты небазисного вектора. Получим

$1x_{41} + 0x_{51} + 0x_{61} = 2$,

$0x_{41} + 1x_{51} + 0x_{61} = 3$,

$0x_{41} + 0x_{51} + 1x_{61} = 2$,

значит $x_{41} = 2$, $x_{51} = 3$, $x_{61} = 2$.

Отсюда значение

$$z_k = z_1 = \sum_{j=n+1}^{n+m} c_j x_{j1} = c_4 \tilde{o}_{41} + c_5 \tilde{o}_{51} + c_6 \tilde{o}_{61} = 0.$$

Проверка условия (3.17) для вектора A_1 дает

$$c_1 > z_1.$$

Следовательно, переход к новому базисному решению приводит к увеличению критерия оптимальности. Величину приращения определим, выбрав $\theta^{(1)}$. Для этого найдем величины θ_{j1}

$$\theta_{41} = \frac{\lambda_4^{(0)}}{x_{41}} = \frac{3}{2}, \ \theta_{51} = \frac{\lambda_5^{(0)}}{x_{51}} = \frac{4}{3}, \ \theta_{61} = \frac{\lambda_6^{(0)}}{x_{61}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Минимальное значение имеет величина θ_{61}, поэтому примем

$$\theta^{(1)} = \theta_{61} = 1.$$

Приращение критерия равно

$$\Delta R^{(1)} = \theta^{(1)}(c_1 - z_1) = 1(1-0) = 1.$$

Определим соответствующее базисное решение. В исходном базисе заменяется вектор A_6 на вектор A_1, в результате чего новое базисное решение:

$$\lambda_1^{(1)} = \theta^{(1)} = 1,$$

$$\lambda_2^{(1)} = 0,$$

$$\lambda_3^{(1)} = 0,$$

$$\lambda_4^{(1)} = \lambda_4^{(0)} - \theta^{(1)} x_{41} = 3 - 1 \cdot 2 = 1,$$

$$\lambda_5^{(1)} = \lambda_5^{(0)} - \theta^{(1)} x_{51} = 4 - 1 \cdot 3 = 1,$$

$$\lambda_6^{(1)} = \lambda_6^{(0)} - \theta^{(1)} x_{61} = 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Или в векторной форме:

$\lambda^{(1)} = (1,0,0,1,1,0)$.

Этому решению соответствуют базисные векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное решение в выражение критерия, найдем

$$R^{(1)} = 1 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Теперь разложим вектор A_2 по векторам нового базиса.

$$A_2 = A_1 x_{12} + A_4 x_{42} + A_5 x_{52}.$$

Получим систему уравнений

$$2x_{12} + 1x_{42} + 0x_{52} = 1,$$

$$3x_{12} + 0x_{42} + 1x_{52} = -1,$$

$$2x_{12} + 0x_{42} + 0x_{52} = -2,$$

решение которой

$$x_{12} = -1,\ x_{42} = 3,\ x_{52} = 2,$$

Для базисного решения $\lambda^{(2)}$, получим

$$z_2 = c_1 x_{12} + c_4 x_{42} + c_5 x_{52} = 1(-1) + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = -1$$

и условие $c_2 > z_2$ выполняется, следовательно, новое базисное решение вызывает увеличение критерия оптимальности.

Величина $\theta^{(2)}$, определяемая как наименьшее положительное отношение $\frac{\lambda_j^{(1)}}{x_{jk}}$, в данном случае равна

$$\theta^{(2)} = \min_{j=4,5} \frac{\lambda_j^{(1)}}{x_{j2}} = \min_{j=4,5} \left(\frac{\lambda_4^{(1)}}{x_{42}} = \frac{1}{3}; \frac{\lambda_5^{(1)}}{x_{52}} = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, в новом базисе исключается вектор A_4 и вместо него вводится вектор A_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующее ему базисное решение определяется как

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} - \theta^{(2)} x_{12} = \frac{4}{3},$$

$$\lambda_2^{(2)} = \theta^{(2)} = \frac{1}{3},$$

$$\lambda_3^{(2)} = 0,$$

$$\lambda_4^{(2)} = 0,$$

$$\lambda_5^{(2)} = \lambda_5^{(1)} - \theta^{(2)} x_{52} = \frac{1}{3},$$

$$\lambda_6^{(2)} = 0.$$

В векторной форме:

$$\lambda^{(2)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0 \right).$$

Прирост критерия оптимальности при переходе от базисного решения $\lambda^{(1)}$ к новому базисному решению $\lambda^{(2)}$ составляет

$$\Delta R^{(2)} = \theta^{(2)} (c_2 - z_2) = \frac{1}{3} (0{,}5 + 1) = \frac{1}{2}$$

и новое значение критерия

$$R^{(2)} = R^{(1)} + \Delta R^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Для отыскания еще одного базисного решения найдем разложение вектора A_3 по векторам базиса, соответствующего базисному решению

$$A_3 = A_1 x_{13} + A_2 x_{23} + A_5 x_{53}.$$

Коэффициенты x_{jk} в разложении находим из системы уравнений

$$1 = 2x_{13} + 1x_{23} + 0x_{53},$$

$$1 = 3x_{13} - 1x_{23} + 1x_{53},$$

$$-1 = 2x_{13} - 2x_{23} + 0x_{53};$$

$$x_{13} = \frac{1}{6},\ x_{23} = \frac{2}{3},\ x_{53} = \frac{7}{6}.$$

Вычисляем значение z_3

$$z_3 = c_1x_{13} + c_2x_{23} + c_5x_{53} = 1\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} + 0\frac{7}{6} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно $c_3 > z_3$, что означает: новое базисное решение дает большее значение критерия оптимальности.

При этом значение $\theta^{(3)}$ с учетом базисного решения получается равным

$$\theta^{(3)} = \min_{j=1,2,5} \frac{\lambda_j^{(2)}}{x_{j3}} = \frac{\lambda_5^{(2)}}{x_{53}} = \theta_{53} = \frac{2}{7}$$

Значит в базисе следует заменить вектор A_5 на A_3 и новый базис

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее ему базисное решение $\lambda^{(3)}$

$$\lambda_1^{(3)} = \lambda_1^{(21)} - \theta^{(3)}x_{13} = \frac{4}{3} - \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{7},$$

$$\lambda_2^{(3)} = \lambda_2^{(2)} - \theta^{(2)}x_{23} = \frac{1}{3} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{7},$$

$$\lambda_3^{(3)} = \theta^{(3)} = \frac{2}{7},$$

$$\lambda_4^{(3)} = 0,$$

$\lambda_5^{(3)} = \lambda_5^{(2)} - \theta^{(3)} x_{53} = \frac{1}{3} - \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{6} = 0$,

$\lambda_6^{(3)} = 0$.

В векторной форме записи:

$\lambda^{(3)} = \left(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0,0,0 \right)$.

Прирост критерия оптимальности составляет

$\Delta R^{(3)} = \theta^{(3)} (c_3 - z_3) = \frac{2}{7} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{7}$,

$R^{(3)} = R^{(2)} + \Delta R^{(3)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{7} = \frac{23}{14}$.

Итак, в результате первых трех шагов все векторы первоначального базиса выведены из базиса. Однако, это еще не означает, что уже достигнуто максимальное значение критерия, и процесс поиска нужно прекратить. Необходимо снова попытаться вводить векторы A_4, A_5, A_6 в базис, чтобы найти лучшее базисное решение.

Порядок выполнения задания

1. Изучить симплексный метод.
2. Определить базисные и небазисные векторы согласно варианту задания (табл. 1.1).
3. Разложить небазисный вектор по векторам базиса, рассчитать коэффициенты разложения.
4. Определить целесообразность перехода к новому базисному решению
5. Рассчитать новое базисное решение и значение критерия оптимальности.
6. Выполнить не менее двух разложений небазисных векторов по векторам базиса.

Таблица 1.1

Варианты заданий 1 – 10	
Варианты 1	*Варианты 2*
$R = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$; $\lambda^{(0)} = (1,1,0)$.	$R = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,0,1,1)$.
Варианты 3	*Варианты 4*
$R = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,0,0,1)$.	$R = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,1,0)$.
Варианты 5	*Варианты 6*
$R = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,1,0,0)$.	$R = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,0,1)$.
Варианты 7	*Варианты 8*
$R = x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,1,0,0)$.	$R = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,0,0,1)$.
Варианты 9	*Варианты 10*
$R = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,0,1)$.	$R = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,1,0)$.

Варианты заданий 11 – 20	
Варианты 11	*Варианты 12*
$R = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$; $\lambda^{(0)} = (1,1,0)$.	$R = 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,0,1,1)$.
Варианты 13	*Варианты 14*
$R = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,0,0,1)$.	$R = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,1,0)$.
Варианты 15	*Варианты 16*
$R = 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,1,0,0)$.	$R = 5x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,0,1)$.
Варианты 17	*Варианты 18*
$R = 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,1,0,0)$.	$R = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (1,0,0,1)$.
Варианты 19	*Варианты 20*
$R = 5x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,0,1)$.	$R = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$; $\lambda^{(0)} = (0,1,1,0)$.

ЗАДАНИЕ II.
ОПТИМИЗАЦИЯ РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая формулировка задачи оптимизации часто может быть представлена как задача отыскания наибольшего или наименьшего значения функции нескольких переменных

$$R = R(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.1)$$

где функция R является количественной оценкой представляющего интерес качества объекта оптимизации.

На независимые переменные x_j $(j = 1,2,..., n)$ в общем случае можно наложить ограничения в виде равенств:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; i = 1,2,..., m \qquad (2.2а)$$

или неравенств:

$$\phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \; i = 1,2,..., k \qquad (2.2б)$$

или же тех и других одновременно.

Особые трудности возникают тогда, когда соотношение (2.1), определяющее значение критерия оптимальности для заданной совокупности значений независимых переменных x_j, не может быть записано в явном виде. Наличие ограничений (2.2), которые могут быть заданы как трудновычислимые функции независимых переменных, еще более затрудняют отыскание оптимального решения и требует использования специальных приемов решения. Задачи такого типа, т.е. с нелинейными и трудновычислимыми соотношениями, определяющими критерий оптимальности (2.1) и ограничения (2.2), являются предметом рассмотрения специального раздела математики – нелинейного программирования [5 – 7].

Как правило, решение задач нелинейного программирования может быть найдено только численными методами, поэтому возникает необходимость применения вычислительной техники.

В большинстве своем методы нелинейного программирования могут быть охарактеризованы как многошаговые методы или методы последовательного улучшения начального решения.

Большинство методов нелинейного программирования используют идею движения в n-мерном пространстве в направлении оптимума. При этом из некоторого исходного или промежуточного состояния $x^{(k)}$ осуществляется переход в следующее состояние $x^{(k+1)}$ изменением состояния $x^{(k)}$ на величину $\Delta x^{(k)}$, называемую шагом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}. \qquad (2.3)$$

Очевидно, что для случая поиска минимума целевой функции $R(x)$ должно выполняться условие

$$R\left(x^{(k+1)}\right) < R\left(x^{(k)}\right),$$

иначе перевод в состояние $x^{(k+1)}$ нецелесообразен.

Значительное число методов нелинейного программирования в соответствии со способом определения шага $\Delta x^{(k)}$ можно отнести к одному из трех основных классов:

1) градиентные методы;
2) безградиентные методы детерминированного поиска;
3) методы случайного поиска.

Градиентные методы

Градиентные методы поиска оптимума целевой функции основаны на использовании двух основных свойств градиента функции.

1. Градиент функции $\nabla R(x)$ – это вектор, который в каждой точке области определения функции $R(x)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной через эту точку. Проекции градиента $\nabla R(x)$ на оси координат равны частным производным функции $R(x)$ по соответствующим переменным:

$$\nabla R(x) = \left(\frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial x_n}\right). \qquad (2.4)$$

2. Направление градиента характеризует направление наибольшего возрастания функции.

К градиентным методам относятся: метод релаксации, градиента, наискорейшего спуска и ряд других [5 – 7].

Рассмотрим некоторые из градиентных методов.

Метод градиента

В этом методе спуск производится в направлении наибыстрейшего изменения целевой функции, что, естественно, ускоряет процесс поиска оптимума.

Поиск оптимума производится в два этапа. На первом этапе находятся значения частных производных по всем независимым переменным, которые определяют направление градиента в рассматриваемой точке. На втором этапе осуществляется шаг в направлении, обратном направлению градиента (при поиске минимума целевой функции).

При выполнении шага одновременно изменяются значения всех независимых переменных. Каждая из них получает приращение пропорциональное соответствующей составляющей градиента по данной оси.

Формульная запись алгоритма может иметь вид:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - h\frac{\partial R\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_j},\ j = 1,2,...,n\,. \qquad (2.5)$$

В этом случае величина шага $\Delta x_j^{(k)}$ при постоянном значении параметра h изменяется автоматически с изменением величины градиента и при приближении к оптимуму уменьшается.

Характер поиска оптимума в методе градиента показан на рис. 2.1. Момент окончания поиска можно найти проверкой на каждом шаге соотношения

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial x_j}\right)^2 \le \varepsilon\,,$$

где ε – заданная погрешность расчета.

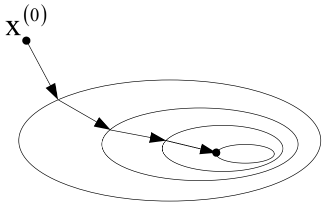


Рис. 2.1. Характер движения к оптимуму в методе градиента с большой величиной шага

Недостатком градиентного метода является то, что при его использовании можно обнаружить только локальный минимум целевой функции. Для того, чтобы найти у функции другие локальные минимумы, необходимо производить поиск из других начальных точек. Другим недостатком этого метода является значительный объем вычислений, т.к. на каждом шаге определяются значения всех частных производных оптимизируемой функции по всем независимым переменным.

Метод наискорейшего спуска

При применении метода градиента на каждом шаге нужно определять значения частных производных оптимизируемой функции по всем независимым переменным. Сокращения объема вычислений можно добиться используя метод наискорейшего спуска. Сущность метода заключается в следующем. После того как в начальной точке будет найден градиент оптимизируемой функции и тем самым определено направление ее наибыстрейшего убывания в указанной точке, в данном направлении делается шаг спуска (рис. 2.2).

Если значение функции в результате этого шага уменьшилось, производится очередной шаг в том же направлении, и так до тех пор, пока в этом направлении не будет найден минимум, после чего вычисляется градиент и определяется новое направление наибыстрейшего убывания целевой функции.

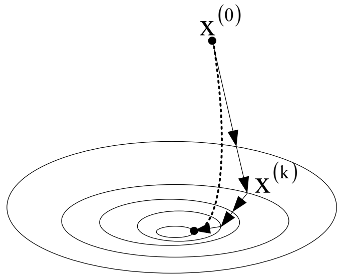


Рис. 2.2. Характер движения к оптимуму в методе наискорейшего спуска (–) и методе градиента (····)

В сравнении с методом градиента метод наискорейшего спуска оказывается более выгодным из-за сокращения объема вычислений.

Важной особенностью метода наискорейшего спуска является то, что при его применении каждое новое направлении движения к оптимуму ортогонально предшествующему. Это объясняется тем, что движение в одном направлении производится до тех пор, пока направление движения не окажется касательным к какой-либо линии постоянного уровня.

В качестве критерия окончания поиска может использоваться то же условие, что и рассмотренное выше, либо условие:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(A)}-x_j^{(B)}\right)^2}\le\varepsilon ,$$

где $x_j^{(A)}$ и $x_j^{(B)}$ – координаты начальной и конечной точек последнего отрезка спуска (рис. 2.3). Этот же критерий может использоваться в сочетании с контролем значений целевой функции в точках $x^{(A)}$ и $x^{(B)}$

$$\left|R\left(x^{(A)}\right)-R\left(x^{(B)}\right)\right|\le\varepsilon .$$

Совместное применение условий окончания поиска оправдано в тех случаях, когда оптимизируемая функция имеет резко выраженный минимум.

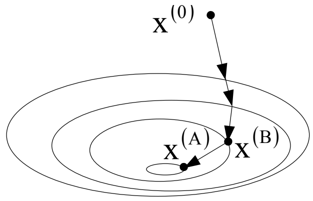


Рис. 2.3. К определению окончания поиска в методе наискорейшего спуска

Алгоритм решения задачи методом наискорейшего спуска

Пусть требуется найти минимум целевой функции
$R = R(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x \in X$.

1. Выбирается начальная точка поиска $x^{(0)} \in X$.

2. Определяется значение функции в точке $R(x^{(0)})$.

3. В исходной точке $x^{(0)}$ вычисляется градиент (2.4). Находится направление набольшего возрастания функции.

4. В направлении антиградиента делается шаг спуска

$$x^{(1)} = x^{(0)} - h\frac{\partial R(x^{(0)})}{\partial x}.$$

5. Рассчитывается функция в точке $x^{(1)}$: $R^{(1)} = R(x^{(1)})$.

6. Сравниваются значения целевой функции в точке $x^{(1)}$ и начальной точке поиска $x^{(0)}$.

Если $R^{(1)} < R^{(0)}$, то выполненный шаг считается удовлетворительным и новое значение $R^{(1)}$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(1)}$. Если же $R^{(1)} > R^{(0)}$, то необходимо изменить начальную точку поиска $x^{(0)}$, либо уменьшить величину рабочего шага h.

7. Затем делается новый шаг в том же направлении и так до тех пор, пока не будет найден минимум в этом направлении.

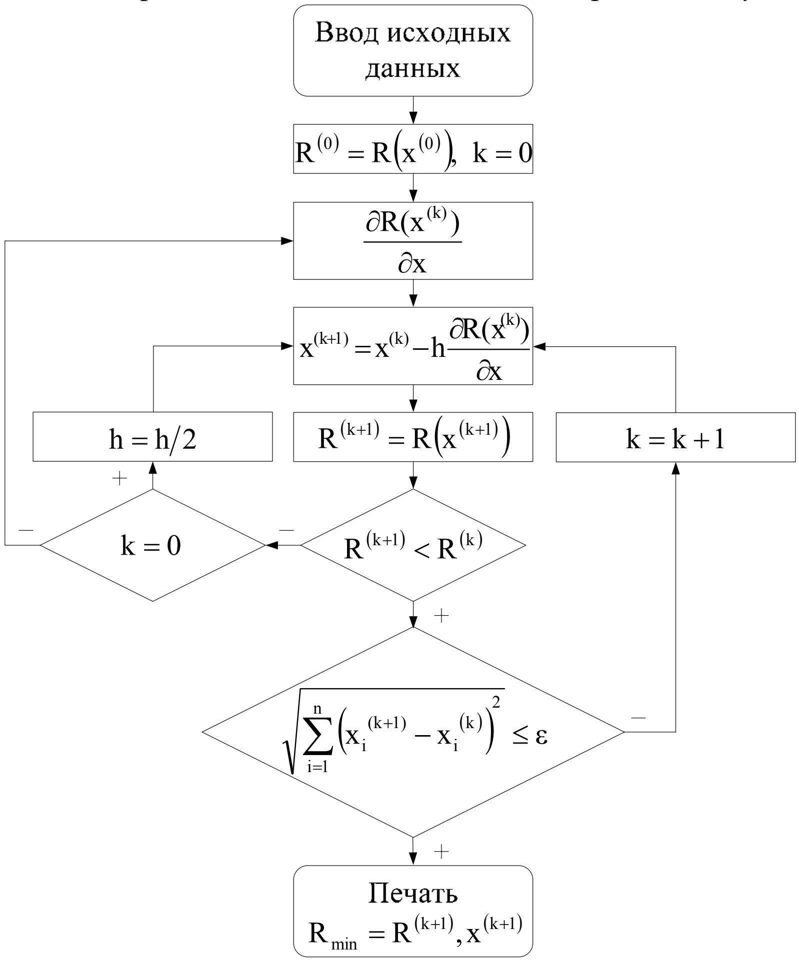
Если в некоторой точке $x^{(k)}$ $R^{(k)} > R^{(k\text{-}1)}$, то в точке $x^{(k\text{-}1)}$ вычисляется градиент целевой функции (рис. 2.2) и определяется новое направление наибыстрейшего убывания функции.

8. Условие окончания поиска:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(k+1)} - x_i^{k}\right)^2} \le \varepsilon,$$

которое проверяется после каждого удачного шага.

Блок-схема решения задачи методом наискорейшего спуска



Безградиентные методы детерминированного поиска

Нахождение производных при наличии трудновычисляемого критерия оптимальности в случае градиентных методов связано с необходимостью выполнения значительного объема вычислений, что приводит к существенному увеличению времени поиска, особенно при большом числе независимых переменных.

Безградиентные методы используют в процессе поиска информацию, получаемую не при анализе производных, а от сравнительной оценки критерия оптимальности в результате выполнения очередного шага. Некоторые из этих методов целесообразно применять в сочетании с градиентными методами, что позволяет иногда построить довольно эффективные алгоритмы для решения задач нелинейного программирования.

Кроме того, безградиентные методы наиболее пригодны для оптимизации действующих промышленных и лабораторных установок в условиях отсутствия математического описания объекта оптимизации.

К безградиентным методам детерминированного поиска относятся: метод локализации экстремума функции, метод «золотого сечения», метод поиска с использованием чисел Фибоначчи, метод Гаусса-Зейделя, метод сканирования [5]. Рассмотрим один из этих методов – метод сканирования.

Метод сканирования

Метод сканирования заключается в последовательном просмотре значений критерия оптимальности в ряде точек, принадлежащих области изменения независимых переменных, и нахождении среди этих точек такой, в которой критерий оптимальности имеет минимальное (максимальное) значение. Точность метода определяется тем, насколько «густо» располагаются выбранные точки в допустимой области изменения независимых переменных.

Основным достоинством этого метода является то, что при его использовании с достаточно малым шагом изменения, по каждой из переменных гарантируется отыскание глобального оптимума.

Другое достоинство – независимость от вида оптимизируемой функции.

К недостаткам метода относится необходимость вычисления критерия для большого числа точек. Последнее обстоятельство существенно ограничивает возможности использования метода сканирования.

Практически этим методом могут решаться задачи, для которых число независимых переменных не превышает 2-3, кроме того, расчет одного значения критерия не требует большого объема вычислений.

Для сокращения объема вычислений используется алгоритм с переменным шагом сканирования.

Алгоритм метода сканирования с переменным шагом

Рассмотрим случай, когда число независимых переменных равно двум, задана область изменения независимых переменных:

$a_1 \le x_1 \le b_1$, $a_2 \le x_2 \le b_2$.

1. В качестве первого приближения минимального значения целевой функции примем $R^{(0)} = 100000$.

2. Определяем начальный шаг сетки переменных

$\Delta x_1^{(0)} = k^r \Delta x_1$,

$\Delta x_2^{(0)} = k^r \Delta x_2$,

где Δx_1, Δx_2 – точность определения оптимума, r – число этапов уточнения поиска, на которых шаг поиска уменьшается в k раз.

3. Разбиваем область изменения независимых переменных с шагом $\Delta x_1^{(0)}$, $\Delta x_2^{(0)}$ на совокупность точек, значение целевой функции в которых вполне определяют ее поведение.

4. Определяем значение целевой функции в узлах сетки переменных. Пусть $x_1 = a_1$. Для каждого значения x_2 из интервала $[a_2, b_2]$ при $x_1 = a_1$ определяем значение целевой функции.

Изменяем значение переменной x_1 на шаг $\Delta x_1^{(0)}$ и при новом значении $x_1 = x_1 + \Delta x_1^{(0)}$ для каждого значения x_2 из интервала $[a_2, b_2]$ вычисляем значение целевой функции. Аналогичным образом исследуем весь диапазон изменения переменных.

Находим значение целевой функции в узлах сетки переменных.

5. В результате грубого поиска определяем узел (c_1, c_2), в котором значение целевой функции наименьшее (наибольшее).

6. Определяем область изменения независимых переменных, в пределах которой будем уточнять значение оптимума целевой функции.

$$a_1 = c_1 - \Delta x_1^{(0)},$$
$$a_2 = c_2 - \Delta x_2^{(0)},$$
$$b_1 = c_1 + \Delta x_1^{(0)},$$
$$b_2 = c_2 + \Delta x_2^{(0)}.$$

7. Производим сканирование новой области с меньшим шагом

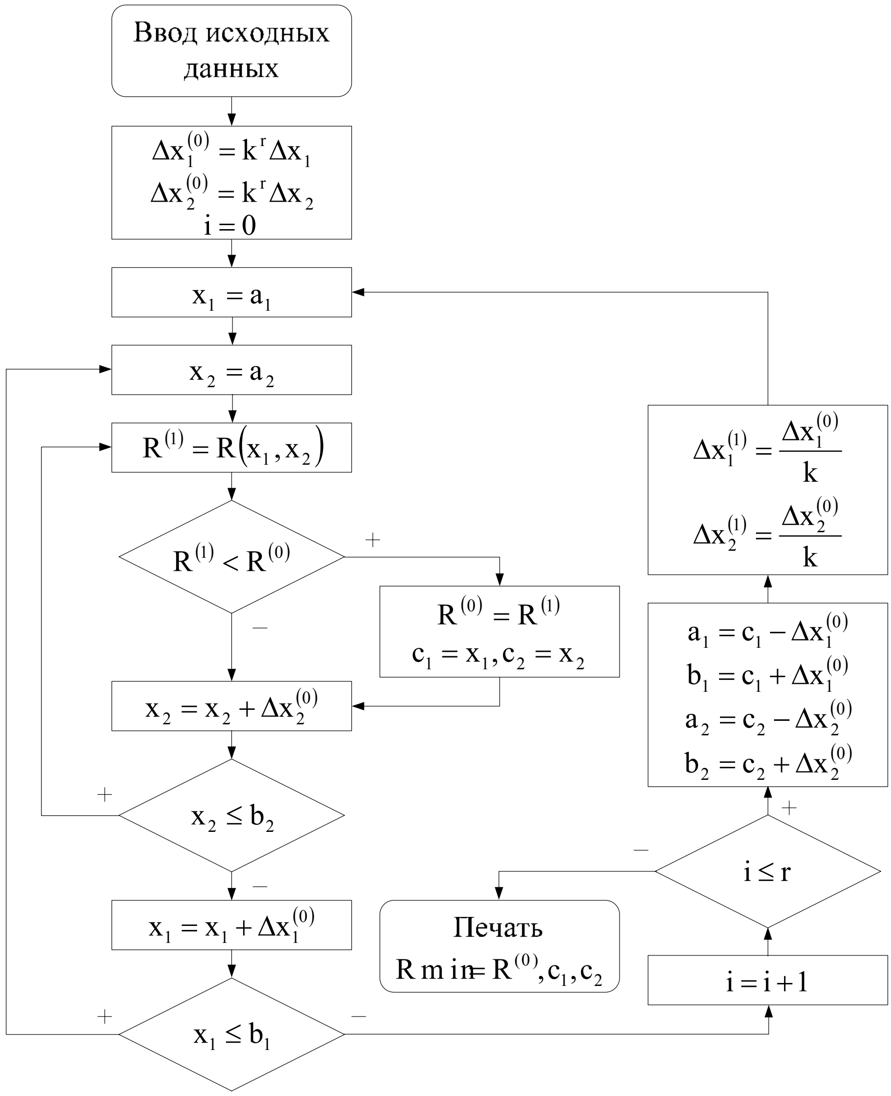
$$\Delta x_1^{(1)} = \frac{\Delta x_1^0}{k},$$
$$\Delta x_2^{(1)} = \frac{\Delta x_2^{(0)}}{k},$$

где $\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_2^{(1)}$ – шаг уточнения, с которым исследуется новая область.

8. Определяем значения целевой функции в узлах новой сетки переменных вышеизложенным способом.

Находим узел, в котором значение целевой функции наименьшее (наибольшее). Если более не предусмотрено этапов уточнения, то найденное значение целевой функции будет оптимальным.

Блок – схема алгоритма решения задачи методом сканирования



Методы случайного поиска

Основная идея методов случайного поиска [5] заключается в том, чтобы перебором случайных совокупностей значений независимых переменных найти оптимум целевой функции или направление движения к нему. Общим для всех методов случайного поиска является применение случайных чисел в процессе поиска. Введем понятие случайного вектора

$$\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right),$$

определенного в n-мерном пространстве. Относительно вектора α предположим, что он с равной вероятностью может принимать любое направление в n-мерном пространстве и имеет длину равную 1. Такой вектор может быть получен из последовательности случайных чисел β_j $\left(j = 1,2,\ldots,n\right)$, равномерно распределенных на числовом интервале.

Для нахождения случайного вектора α с помощью последовательности случайных чисел β_j, выразим компоненты случайного вектора α соотношениями:

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}}; \; j = 1,2,\ldots,n.$$

При таком способе определения случайного вектора α его длина будет равна 1, т.к. очевидно равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{\,2} = 1.$$

Таким образом, вектор α характеризует случайное направление в n-мерном пространстве.

Метод случайных направлений

Основная идея метода заключается в том, что из точки n-мерного пространства, для которой значение $R\left(x^{(k)}\right)$ функции цели уже рассчитано, производится шаг в случайном направлении, определяемом случайным вектором $\alpha^{(k)}$.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h\alpha^{(k)},$$

в которой вычисляется значение функции цели.

Если при выполнении случайного шага $h\alpha^{(k)}$, приводящего в точку $x^{(k+1)}$, получается меньшее значение функции цели, то он считается удовлетворительным (удачным) и новое значение $R\left(x^{(k+1)}\right)$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(k+1)}$. Затем делается новый шаг $h\alpha^{(k+1)}$ в случайном направлении и т.д.

Если же случайный шаг $h\alpha^{(k)}$ оказывается неудачным, то производится выборка следующего случайного вектора α и из точки $x^{(k)}$ снова выполняется шаг.

Пробные шаги из точки $x^{(k)}$ делаются до тех пор, пока не будет найдена точка $x^{(k+1)}$, в которой функция цели имеет меньшее значение, после чего пробные шаги выполняются уже из точки $x^{(k+1)}$.

Поиск заканчивается, если после выполнения серии из s шагов меньшего значения функции цели найти не удается. Для практических расчетов число шагов в серии часто применяется равным размерности решаемой задачи n.

Эффективность поиска может несколько возрасти при применении шага переменной величины $h^{(k)}$. В данном случае после выполнения серии из s неудачных шагов поиск не заканчивается, а уменьшается только величина шага $h^{(k)}$, вслед за чем отсчет шагов в серии возобновляется. Критерием окончания поиска служит минимальный размер шага h^{min}, которым и задается точность определения оптимума.

Метод случайных направлений с обратным шагом

Этот метод случайного поиска по существу представляет собой улучшение алгоритма, рассмотренного выше. Отличительной особенностью этого метода является то, что при неудачном шаге $h^{(k)}\alpha^{(k)}$ из точки $x^{(k)}$ сразу производится шаг в обратном направлении $-h^{(k)}\alpha^{(k)}$.

При достаточном удалении от оптимума такая стратегия поиска оказывается весьма эффективной. Если и обратный шаг оказывается неудачным, то можно сделать новый случайный шаг из точки $x^{(k)}$ или, что более целесообразно, перейти к поиску с уменьшенным размером шага.

Получение случайных чисел из последовательности иррациональных чисел

Этот способ основан на свойстве иррациональных чисел образовывать неупорядоченную последовательность цифр дробной части при вычислении иррационального числа с достаточно высокой степенью точности.

В наиболее простой форме данный способ реализуется при расчете дробной части произведения иррационального числа z на последовательность натуральных чисел. При этом алгоритм может быть записан в следующем виде:

$\beta_j^{(k)} = \{kz_j\}$; $j = 1,2,...,n$; $k = 1,2,3,...$

Фигурные скобки в выражении означают, что из произведения kz_j берется только дробная часть, которая должна вычисляться с необходимой степенью точности, характеризующей разрядность находимых псевдослучайных чисел.

Алгоритм метода случайных направлений с обратным шагом

1. Определяется значение критерия оптимальности в начальной точке поиска $R^{(0)} = R\left(x^{(0)}\right)$.

2. Производится выборка случайных чисел на основе последовательности иррациональных чисел.

$\beta_1^{(k)} = \{kz_1\}$; $\beta_2^{(k)} = \{kz_2\}$ $k = 1,2,3,...$

3. Находится значение целевой функции в следующей точке поиска

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}\alpha^{(0)} ,$$

где

$$\alpha_j^{(0)} = \frac{\beta_j^{(1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_j^{(1)}\right)^2}} .$$

4. Сравниваются значения целевой функции в точке $x^{(1)}$ и начальной точке $x^{(0)}$. Если $R^{(1)} < R^{(0)}$, то выполненный шаг удачный и новое значение $R^{(1)}$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(1)}$.

5. Затем производится новый шаг в случайном направлении из точки $x^{(1)}$: определяется $\beta^{(2)}$, считается $\alpha^{(1)}$, вычисляются $x^{(2)}$ и $R^{(2)}$ и т.д. При этом каждое новое удачное значение $R^{(k)}$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(k)}$.

Если же $R^{(k)} > R^{(k\text{-}1)}$, то производится шаг в обратном направлении $-h^{(k-1)}\alpha^{(k-1)}$. При удачном шаге также запоминается значение целевой функции и координаты точки. Если обратный шаг неудачный, то можно либо сделать шаг в новом направлении из предыдущей точки $x^{(k-1)}$, либо перейти к поиску с уменьшенным размером шага.

Критерием окончания поиска является минимальная величина рабочего шага h_j^{min}, задаваемая по каждой переменной.

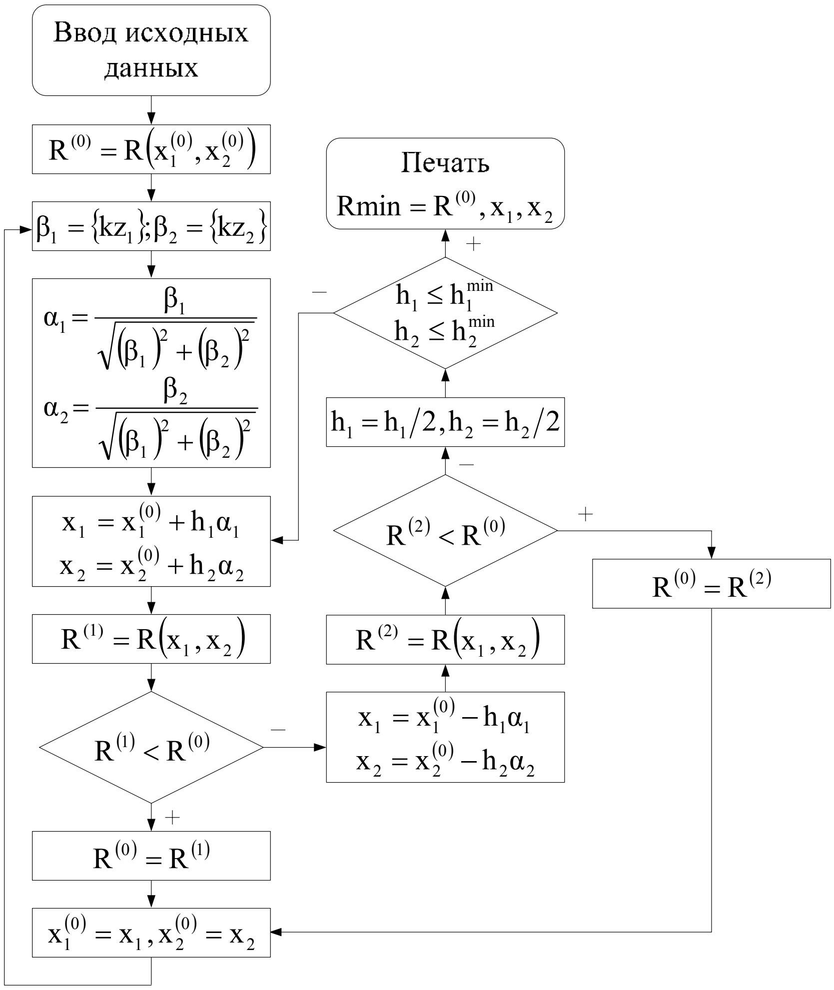
Для получения псевдослучайных последовательностей из иррациональных чисел по каждой переменной необходимо задать иррациональные числа $z_1, z_2, ..., z_n$, например,

$$z_1 = \sqrt{3}, z_2 = \sqrt{5}, ...$$

и рассчитать дробную часть из произведения

$$\beta_1^{(k)} = \left\{k\sqrt{3}\right\};\ \beta_2^{(k)} = \left\{k\sqrt{5}\right\};\ k = 1,2,3,...$$

Блок – схема алгоритма решения задачи методом случайных направлений с обратным шагом



Задача оптимизации реактора идеального смешения

Рассмотрим задачу минимизации себестоимости продукта реакции в реакторе идеального смешения. Необходимо найти оптимальные условия, минимизирующие себестоимость получаемого продукта P из исходного сырья A, определяемую с учетом затрат на сырье и амортизацию реактора.

Скорости образования компонентов A и P имеют вид:

$$w_A = -(k_1(T)+k_2(T))x_A, \; w_P = k_1(T)x_A .$$

где $k_1(T)$, $k_2(T)$ – константы скорости реакций, связаны с температурой реакции уравнением Аррениуса

$$k_1(T) = k_{1\infty}\exp\left(-\frac{E_1}{R_g T}\right), \; k_2(T) = k_{2\infty}\exp\left(-\frac{E_2}{R_g T}\right),$$

Критерий оптимальности, значение которого необходимо минимизировать, имеет вид:

$$R = \frac{1}{k_1(T)}\left[1+\tau(k_1(T)+k_2(T))\right]\left(\frac{S_A}{\tau}+\frac{S_V}{x_A^{(0)}}\right),$$

где $x_A^{(0)}$ – концентрация сырья в реакционной смеси, подаваемой в реактор; x_p – концентрация продукта на выходе реактора; S_A – стоимость исходного сырья; S_V – стоимость единицы объема реактора, исчисляемая с учетом его амортизации; V – объем реактора; υ – скорость потока сырья, поступающего в зону идеального смешении; $k_{1\infty}$, $k_{2\infty}$ – предэкспоненциальные множители; R_g – универсальная газовая постоянная; T – температура в реакционной зоне; E_1, E_2 – энергия активации компонентов.

Минимизация критерия R проводится выбором значений температуры T и времени пребывания реагентов в реакторе τ.

Порядок выполнения задания

1. Ознакомиться с методами нелинейного программирования.
2. В соответствии вариантом задания (табл. 2.1) разработать алгоритм решения задачи.
3. Составить блок-схему алгоритма.
4. Написать программу решения задачи на ЭВМ.

5. Исследовать влияние величины рабочего шага на искомое значение целевой функции.

Таблица 2.1

Варианты заданий

Метод	*Вариант*	E_1/R_g	E_2/R_g	z_1	z_2	T_{min}	τ_{min}	T_{max}	τ_{max}
Градиентный	1	2500	5000	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	390	0.2	425	0.8
	2	2600	4900	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	400	0.2	420	0.8
	3	2300	4500	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	420	0.3	415	0.8
	4	3000	6000	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	350	0.1	400	0.9
Наискорейшего спуска	5	2750	5200	$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	360	0.15	410	0.85
	6	2000	5000	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	350	0.15	390	0.8
	7	2500	6100	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	380	0.1	430	0.8
	8	2100	4900	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	300	0.05	400	0.7
Случайных направлений	9	2250	4150	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	325	0.15	450	0.9
	10	2600	4900	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	300	0.45	400	0.7
	11	3000	5000	$\sqrt{5}$	$\sqrt{11}$	300	0.1	400	0.9
	12	2450	5200	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	350	0.3	440	0.95
Случайных направлений с обратным шагом	13	2800	5400	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	325	0.25	450	0.75
	14	3000	7000	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	350	0.1	400	0.9
	15	2100	5200	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	300	0.2	480	0.95
	16	3000	6000	$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	400	0.1	475	0.9
Сканирования с переменным шагом	17	2500	5100	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	380	0.15	430	0.7
	18	2500	5000	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	380	0.25	425	0.9
	19	3000	4000	$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	390	0.1	475	0.9
	20	1900	5000	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	350	0.1	390	0.8

$$x_A^{(0)} = 1,\ S_A = 100,\ S_V = 200,$$

$$h_{min}^T = 0.1,\ h_{min}^\tau = 0.001,\ k_{1\infty} = 853.13,\ k_{2\infty} = 735169.71,\ \varepsilon = 0.01.$$

ЗАДАНИЕ III.
ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Задачи определения оптимальных процессов характеризуются двумя наиболее важными особенностями:

1) минимизируемый функционал зависит не только от фазовых координат x_j $(j = 1,2,...,n)$, изменяющихся непрерывно, но и от управляющих воздействий u_i $(i = 1,2,...,r)$ которые могут быть кусочно-непрерывными функциями с конечным числом точек разрыва первого рода (рис. 3.1);

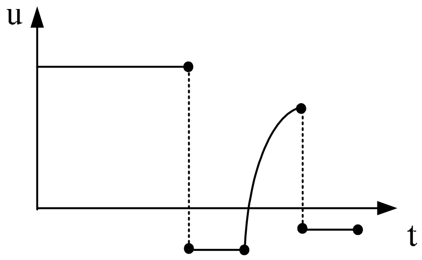


Рис. 3.1. Управляющее воздействие

2) ограничения на фазовые координаты и управляющие воздействия выражаются в виде неравенств

$$\left|x_j\right| \le x_j^*,\ \left|u_i\right| \le u_i^*.$$

Это значит, что фазовые траектории и управления могут частично или полностью проходить по границе допустимой области. Физический смысл рассмотрения замкнутой и ограниченной области управления u ясен: управляющими параметрами $u_1, u_2, ..., u_r$ могут служить количество подаваемого в печь топлива, температура реактора, количество подаваемого в колонну пара или флегмы и т.п., которые не могут принимать сколь угодно больших или малых значений.

Каждую функцию $u(t)$, определенную на некотором отрезке времени $t_0 \le t \le t_1$ и принимающую значения в области управления U, будем называть управлением. Так как u представляет собой множество в пространстве управляющих параметров $u(t) = u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$, то каждое управление является вектор-функцией, значения которой лежат в допустимой области $u \in U$.

Допустимым управлением условимся называть всякую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ со значениями в области управления $u \in U$, имеющую в каждой точке разрыва τ значение равное пределу слева

$$u(t) = u(\tau - 0)$$

и непрерывную на концах отрезка $t_0 \le t \le t_1$.

Задача с ограничениями, наложенными на координаты и управления методами классического вариационного исчисления решаются лишь в частных случаях.

В реальных системах, где управление и фазовые переменные удовлетворяют ограничениям, мощным инструментом решения задачи оптимизации является метод, предложенный в 1956 г. Понтрягиным Л.С., Болтянским Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., называемый принципом максимума [5, 7].

Принцип максимума является необходимым условием оптимальности для нелинейных систем, а для линейных – необходимым и достаточным.

Задачи оптимального управления можно рассматривать как частные случаи более общей задачи отыскания максимума или минимума функционала

Формулировка принципа максимума в задаче со свободным правым концом

Рассмотрим задачу со свободным правым концом (рис. 3.2). Пусть процесс описывается системой уравнений

$$\dot{x}_j = f_j(x, u, t), \; j = 1,2,...,n, \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-мерный вектор состояния

$u = (u_1, u_2, ..., u_r)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий. Заданы начальные условия $x_j(t_0) = x_{j0}$.

Правый конец траектории $x_j(t_1)$ свободен.

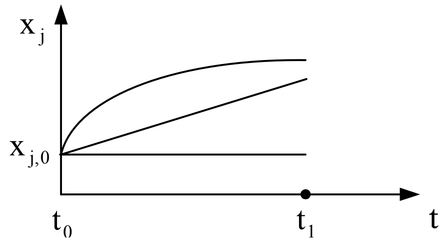


Рис. 3.2. Графическая иллюстрация задачи со свободным правым концом

Управление u определено в допустимой области, $u \in U$.

Необходимо определить вектор управления $u(t) \in U$, обеспечивающий минимум функционала

$$J = \sum_{j=1}^{n} ñ_j x_j(t_1), \tag{3.2}$$

где $c_j = \text{const}$.

Решение задачи можно построить просто, если найти некоторую функцию, тесно связанную с функционалом J и динамикой процесса. Условия минимума функционала J следуют из условия максимума функции Гамильтона H, характеризующей сумму кинетической и потенциальной энергии и выражающейся в виде скалярного произведения вектора количества движения на вектор координат системы

$$H(x, u, \lambda, t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x, u, t), \tag{3.3}$$

где λ_j – вектор количества движения.

Вектор количества движения λ_j определяется как решение дифференциального уравнения.

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x_j}, \; j = 1,2,...,n \tag{3.4}$$

при конечном условии

$$\lambda_j(t_1) = -c_j,$$

где c_j – постоянные, входящие в функционал J.

Дифференцирование гамильтониана H по λ_j дает

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = f_j(x,u,t),$$

а по x_j

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i(x,u,t)}{\partial x_j}. \tag{3.5}$$

Из уравнений (3.1), (3.4), (3.5) можно получить уравнения в канонической форме Гамильтона

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}, \tag{3.6}$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \; j = 1,2,...,n, \tag{3.7}$$

которые должны интегрироваться при условиях:

$$x_j(t_0) = x_{j,0}, \; \lambda_j(t_1) = -c_j.$$

Принцип максимума: если управление $u_{opt}(t)$ доставляет минимум функционалу J, то необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)),$$

что управление $u_{opt}(t)$ удовлетворяет условию

$$H(x_{opt}, u_{opt}, \lambda, t) = \max_{u \in U} H(x, u, \lambda, t).$$

Таким образом, 2n уравнений (3.1) и (3.7) с 2n неизвестными x_j и λ_j и условие $\max\limits_{u \in U} H$ дают решение задачи.

Для нахождения минимума функционала (3.2) при дифференциальных связях (3.1) необходимо:

1. Составить функцию $H = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, f_j(x, u, t)$.

2. Определить сопряженную систему уравнений $\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$ с конечными условиями $\lambda_j(t_1) = -c_j$.

3. Проинтегрировать исходную (3.1) и сопряженную (3.7) системы уравнений.

4. Составить условие максимума функции H, из которого определить оптимальное управление

$$H(x_{opt}, u_{opt}, \lambda, t) = \max_{u \in U} H(x, u, \lambda, t)$$

Заметим, что для исходной системы уравнений (3.1) заданы начальные условия при $t = t_0$, $x_j(t_0) = x_{j,0}$, а для сопряженной системы (3.7) заданы конечные условия при $t = t_1$: $\lambda_j(t_1) = -c_j$.

Поэтому процесс вычисления оптимального управления можно вести от начала интервала к концу или же, наоборот, от конца к началу. В первом случае, зная переменные состояния $x_j(t_0)$ в начале интервала, задаются произвольно значениями переменных $\lambda_j(t_0)$ при $t = t_0$.

Порядок выполнения задания

1. Изучить принцип максимума.
2. В случае интегральной формы записи функционала ввести новую переменную с нулевым начальным условием.
3. Составить функцию Гамильтона согласно варианту (табл. 3.1).
4. Определить систему сопряженных функций и граничных условий.
5. Составить условие максимума функции Гамильтона.
6. Рассчитать оптимальное управление.

Таблица 3.1

Варианты заданий 1 – 10	
Вариант 1	*Вариант 2*
Дана система $\dot{x}_1 = u^2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = x_1(T) + x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 6u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 3x_1(T) + 3x_2(T)$.
Вариант 3	*Вариант 4*
Дана система $\dot{x}_1 = 2u^2$, $\dot{x}_2 = x_1 - 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T) + 7x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 8u^2$, $\dot{x}_2 = x_1 - 4u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 4x_1(T) + 7x_2(T)$.
Вариант 5	*Вариант 6*
Дана система $\dot{x}_1 = u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T) + 4x_2(T)$.
Вариант 7	*Вариант 8*
Дана система $\dot{x}_1 = 4u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 5x_1(T) - 2x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 8u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = -x_1(T) - 2x_2(T)$.
Вариант 9	*Вариант 10*
Дана система $\dot{x}_1 = 8u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 3x_1(T) - 5x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 3u^2$, $\dot{x}_2 = x_1 - 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 3x_1(T) + 9x_2(T)$.

Варианты заданий 11 – 20	
Вариант 11	*Вариант 12*
Дана система $\dot{x}_1 = u^2$, $\dot{x}_2 = x_1 + 7u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T) + 2x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 2u^2$, $\dot{x}_2 = 12x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 12x_1(T) + x_2(T)$.
Вариант 13	*Вариант 14*
Дана система $\dot{x}_1 = 3u^2$, $\dot{x}_2 = 3x_1 - 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T) + x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 4u^2$, $\dot{x}_2 = 3x_1 + 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = x_1(T) + x_2(T)$.
Вариант 15	*Вариант 16*
Дана система $\dot{x}_1 = 6u^2$, $\dot{x}_2 = 4x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T) + 3x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 2u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 2x_1(T) + 2x_2(T)$.
Вариант 17	*Вариант 18*
Дана система $\dot{x}_1 = 8u^2$, $\dot{x}_2 = 4x_1 + 5u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 7x_1(T) - 7x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 3u^2$, $\dot{x}_2 = 4x_1 + 5u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 7x_1(T) - 6x_2(T)$.
Вариант 19	*Вариант 20*
Дана система $\dot{x}_1 = u^2$, $\dot{x}_2 = x_1 + 3u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 3x_1(T) - 5x_2(T)$.	Дана система $\dot{x}_1 = 4u^2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + 4u$; $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ Необходимо найти управление u, минимизирующее функционал $J = 3x_1(T) + 6x_2(T)$.

ЗАДАНИЕ IV. ТЕСТИРОВАНИЕ

4.1. Задание с выбором нескольких верных ответов

Из предложенных вариантов ответов выберите несколько верных.

1.1. Какие из нижеприведенных действий являются основными этапами принятия решений:

1) определение цели решения;
2) определение возможных вариантов решения проблемы;
3) определение возможных исходов каждого решения;
4) оптимизация скалярных критериев после введения для них приоритетов;
5) выбор наилучшего решения на основе поставленной цели.

1.2. Какие из приведенных методов позволяют решить проблему векторной оптимизации:

1) построение области Парето и предоставление проектировщику возможность выбора единственного из Парето-оптимальных решений;
2) метод сканирования;
3) оптимизация на основе компромиссных отношений, вводимых, путем назначения весовых коэффициентов для каждого скалярного критерия;
4) оптимизация, основанная на приближении решения к некоторому, специальным образом выбранному, идеальному значению;
5) выполнение эквивалентного преобразования задачи.

1.3. Укажите, какие из представленных задач относятся к многокритериальным задачам теории принятия решений:

1) задача синтеза сложных технических систем;
2) основная задача управления;
3) оптимизационная задача;
4) задача векторной оптимизации;
5) задача расчета вариации функционала.

1.4. Эквивалентное преобразование основной задачи управления предполагает:

1) введение безразмерных функционалов;
2) расчет функции Гамильтона;
3) построение стратегии управления;
4) получение односторонних ограничений на функционалы;
5) составление функции Лагранжа.

1.5. Функция полезности позволяет:

1) выполнить рациональный выбор;
2) выполнить иррациональный выбор;
3) получить максимум пользы;
4) определить условный экстремум функции;
5) рассчитать градиент функции.

1.6. Перечислите методы нелинейного программирования:

1) градиентные методы;
2) симплексный метод;
3) методы случайного поиска;
4) безградиентные методы детерминированного поиска;
5) методы вариационного исчисления.

1.7. Укажите основные понятия математического аппарата, используемого в решении задач линейного программирования:

1) базис;
2) безразмерный функционал;
3) линейная функция;
4) полиномиальная функция;
5) симплексный метод.

1.8. Какие из приведенных методов нелинейного программирования основаны на расчете градиента функции:

1) метод случайного поиска;
2) градиентный метод;
3) метод сканирования;
4) метод наискорейшего спуска;
5) метод сканирования с переменным шагом.

1.9. В задачах динамического программирования объектом исследования являются:

1) многостадийный процессы, в качестве стадий которых рассматриваются отдельные аппараты;
2) одностадийные процессы;
3) сложные системы;
4) многостадийный процессы, в качестве стадий которых выступают временные отрезки;
5) простые системы.

1.10. Основной задачей управления является:

1) задача терминального управления;
2) задача динамического программирования;
3) задача прохождения через заданную область;
4) многокритериальная задача теории принятия решений;
5) задача линейного программирования.

4.2. Задание с выбором одного верного ответа

Из предложенных вариантов ответов выберите только один верный.

2.1. Функция Гамильтона имеет вид:

1) $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(T)$;
2) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,u)$;
3) $-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$;
4) $\frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}$.

2.2. Какими свойствами обладает Функция Гамильтона вдоль оптимальной траектории процесса:

1) функция непрерывна и постоянна;
2) функция непрерывна;

3) функция постоянна;
4) функция имеет точки разрыва.

2.3. Модуль градиента функции определяется выражением:

1) $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}$;

2) $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$;

3) $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_{0,} y_0)$;

4) $x^{(0)} - \varepsilon \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X=X^0}$.

2.4. Необходимое и достаточное условие существования решения основной задачи управления:

1) $\sum_i \lambda_i f_i(x,u) < 1$;

2) $\min_u \max_s \gamma_s[u] \le 1$;

3) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le 1$;

4) $\max_s \gamma_s[u_k] > 1$.

2.5. Критерий оптимальности в задачах линейного программирования имеет вид:

1) $R = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$;

2) $R = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,u)$;

3) $R = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2$;

4) $R = cx^2$.

2.6. Типичной задачей линейного программирования является:

1) задача поиска экстремума нелинейной функции;
2) задача на условный экстремум;
3) транспортная задача;
4) вариационная задача.

2.7. Дайте определение функционала

1) функционал – это переменная величина, которая зависит от выбора функции (или кривой);
2) функционал – это постоянная величина;
3) функционал – это функция;
4) функционал – это независимая переменная величина.

2.8. Необходимым условием экстремума функции многих переменных является:

1) равенство нулю частных производных функции второго порядка;
2) равенство нулю градиента функции;
3) равенство нулю первой вариации;
4) максимум функции Гамильтона.

2.9. В основе динамического программирования используется:

1) принцип оптимальности Бэллмана;
2) принцип максимума;
3) уравнение Эйлера;
4) симплексный метод.

2.10. Математическая формулировка принципа оптимальности для дискретных процессов имеет вид:

1) $-\frac{\partial \upsilon}{dt} = \min_{u}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} f_i + W\right];$
2) $R_N = \sum_{i=1}^{N} r_i\left(x^{(i-1)}, u^{(i)}\right);$
3) $u_{N0} = \left(u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots, u_0^{(N)}\right);$
4) $f_N\left(x^{(0)}\right) = \max_{u^{(1)} \in U}\left\{r_1\left(x^{(0)}, u^{(1)}\right) + f_{N-1}\left[\varphi^{(1)}\left(x^{(0)}, u^{(1)}\right)\right]\right\}.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте задачу линейного программирования в общем виде.
2. Что такое оптимальный план?
3. Как осуществляется сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств?
4. В каких задачах используется симплексный метод?
5. Алгоритм симплекного метода.
6. Сформулируйте задачу нелинейного программирования в общем виде.
7. Назовите основные методы решения задачи нелинейного программирования.
8. Основные достоинства и недостатки градиентных, безградиентных методов, методов случайного поиска и сканирования.
9. Алгоритмы решения задачи методами наискорейшего спуска, сканирования, случайных направлений.
10. В чем состоит отличие метода наискорейшего спуска от метода градиента?
11. Объясните основные особенности методов случайного поиска и способы получения случайных чисел.
12. Назовите методы решения задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
13. Формулировка принципа максимума.
14. В каких задачах следует применять принцип максимума?
15. Сформулируйте задачу со свободным правым концом.
16. Для каких систем принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности.
17. Что такое многостадийный процесс?
18. Формулировка принципа Бэллмана.
19. Формулировка основной задачи управления.
20. Эквивалентное преобразование задачи.
21. Постановка задачи векторной оптимизации.
22. Сущность метода Парето.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд – М. : Изд-во «Аудит», изд-ое об-е «ЮНИТИ», 1997. – 590.
2. Черноруцкий, И.Г. Методы оптимизации и принятия решений : учебное пособие / И.Г. Черноруцкий. – СПб. : Изд-во «Лань», 2001. – 384 с.
3. Сиразетдинов, Т.К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем / Т.К. Сиразетдинов – М. Машиностроение, 1988. – 160 с.
4. Пупков, К.А. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / К.А. Пупков – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 744 с.
5. Бояринов, А.И. Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. – 2-е изд. – М. : Химия, 1975. – 576 с. : ил.
6. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации : учебник : в 2 кн. Кн. 1. / Ф.П. Васильев – М. : Изд-во МЦНМО, 2011. – 620 с.
7. Галеев, Э.Р. Методы оптимизации : лабораторный практикум / Э.Р. Галеев, В.В. Елизаров, В.И. Елизаров – Казань : Изд-во КГТУ, 2006.
8. Робертс, С. Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления / С. Робертс ; пер. с англ. ; под ред. В.В. Кафарова. – М. : Мир, 1965. – 480 с.

Учебное издание

Галеев Эльдар Рафаэлович
кандидат технических наук

Елизаров Виталий Викторович
доктор технических наук, доцент

Елизаров Виктор Иванович
доктор технических наук, профессор

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ.редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 5.06.2012
Подписано в печать 4.07.2012.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. 3,5. Тираж 100.
Заказ №37.

НХТИ (филиал) ФГОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а.