Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

Л.А.Апайчева, Л.Е.Шувалова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Часть 1

Нижнекамск 2017

УДК 519.22

А76

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ»

Рецензенты:

Вафин Д.Б., доктор технических наук, профессор;

Гайфутдинов А.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент.

А 76 Математическая статистика в примерах и задачах: учебное. пособие. Часть 1 / Л.А.Апайчева, Л.Е.Шувалова. – Нижнекамск: НХТИ (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ», 2017 – 102 с.

В пособие включены основные разделы математической статистики: основы выборочного метода, статистические оценки параметров распределения. По каждому разделу приводятся необходимые теоретические сведения, типовые примеры с решениями и задания для самостоятельного решения.

Предназначено для бакалавров всех направлений и студентов среднего профессионального образования. Пособие может быть использовано также для самостоятельного изучения соответствующего материала.

Подготовлено на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института.

УДК 519.22

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Содержание учебного пособия позволяет получить практические навыки в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов высшего образования для бакалавров технических и экономических направлений.

Пособие может быть использовано студентами также для самостоятельного изучения соответствующего материала.

В пособие включены типовые задачи по всем разделам математической статистики, подробно рассматриваются методы их решения. В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения, состоящие из определений и основных понятий данного раздела. Приведены контрольные вопросы для самопроверки, задания для организации самостоятельной работы. Каждое задание предполагает 30 вариантов задач.

В приложении даны основные справочные данные, необходимые для решения задач.

Пособие состоит из двух частей.

***Математической статистикой (*МС)** называется раздел математики, разрабатывающий методы сбора, описания и анализа результатов наблюдений и экспериментов с целью выявления существующих закономерностей.

Математическая статистика опирается на методы и понятия теории вероятностей. Методы МС носят абстрактный характер и применимы в любых конкретных науках, технике, экономике, используются в задачах планирования, прогнозирования и организации производства, при контроле качества продукции и т.д.

Основными задачами МС являются следующие:

Способы получения, группировки и обработки статистических данных, собранных в результате наблюдений или эксперимента.

- приближенное определение вероятности события по относительной частоте;

- определение закона распределения случайной величины по ряду ее опытных данных;
- оценивание числовых характеристик или параметров распределения случайной величины по данным экспериментов;
- проверка статистических гипотез;
- определение эмпирической зависимости между переменными, описывающими случайное явление, на основе экспериментальных данных.

Математическая статистика возникла в XVIII веке в работах Я. Бернулли, П. Лапласа, К. Пирсона, К. Гаусса, Пуассона. Важные результаты были получены Р. Фишером, Г. Крамером, Ю. Неймоном. Большой вклад в развитие математической статистики внесли русские математики П.Л. Чебышев, А.М. Ляпунов, А.М. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Марков А.А., Бернштейн С.Н. и др.

В России методы математической статистики в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В.Я.Буняковский (1846 г.). Решающее значение для дальнейшего развития математической статистики имели работы русской классической школы теории вероятностей второй половины 19 – начала 20 веков.

ГЛАВА 1

ВЫБОРКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА

При проведении статистического исследования задача часто состоит в изучении объектов и явлений относительно качественного или количественного признаков, характеризующих этот объект. При решении этой задачи можно обследовать каждый из объектов исследуемой совокупности. Однако на практике это часто связано с большими затратами, и поэтому из всей совокупности отбирается некоторое количество объектов, которые подвергаются изучению.

Определение. Множество измеренных (наблюденных) значений $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины (СВ) X называется ***выборкой***.

Числа $x_1,\ x_2, ..., x_n$ называются элементами выборки, а их количество n – ***объемом выборки***.

Выборка записывается в виде n-мерной точки или вектора: $(x_1,\ x_2, ..., x_n)$.

Для изучения двумерной СВ (X, Y) создается двумерная выборка, представляющая таблицу или конечную последовательность пар чисел $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2), ..., (x_n,\ y_n)$.

Определение. ***Генеральная совокупность*** – это совокупность объектов, явлений или процессов, из которых производится выборка.

Определение. Закон распределения изучаемой случайной величины X называется ***генеральным законом распределения***. Это может быть генеральная функция распределения $F(X)$, генеральная плотность распределения, таблица распределения в дискретном случае и так далее.

Генеральный закон, как правило, неизвестен. Его изучают. В общем случае закон распределения СВ X удобно обозначать символом $L(X)$.

В математической статистике по свойствам выборки делают заключение о свойствах изучаемой СВ X.

Числовые характеристики генеральной совокупности называются ***числовыми характеристиками генеральной совокупности***.

В такой схеме выборка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ может рассматриваться как набор чисел, случайной выбранных из генеральной совокупности в соответствии с ее законом распределения $L(X)$.

Процесс составления выборки называется ***выбором***.

Простым случайным выбором (***простейшей выборкой***) называется выбор с возвращением в урновой модели, когда из конечного множества каждый элемент выбирается независимо и равновероятно с другими элементами.

Если один и тот же элемент выбран дважды, то он учитывается один раз.

Различают выборки с возвращением (повторные) и без возвращения (бесповторные). В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед извлечением следующих, во втором не возвращается.

Простым бесповторным отбором называется выбор без возвращения отобранного элемента в общую совокупность.

В дальнейшем будет рассматриваться простой случайный выбор.

1.2. ВАРИАЦИОННЫЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Пусть дана некоторая генеральная совокупность X, из нее извлечена выборка $x_1, x_2, ..., x_n$.

Определение. ***Вариационным рядом*** называется последовательность элементов выборки, расположенных в неубывающем порядке. Одинаковые элементы повторяются.

Запись вариационного ряда:

$$x_1,\ x_2, ..., x_n,$$

где $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

Элементы вариационного ряда $x_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ называются ***порядковыми статистиками*** или ***вариантами***. Минимальный и максимальный элементы выборки называются ***крайними*** (***экстремальными***) ***элементами*** вариационного ряда:

$$x_{\min} = x_1, \; x_{\max} = x_n.$$

Размахом R или ***широтой выборки*** называется

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min}}.$$

Операция расположения значений случайной величины (признака в неубывающем порядке) называется ***ранжированием***.

В дискретном вариационном ряде могут иметься одинаковые элементы.

Для сжатия и дальнейшей обработки информации оказывается полезным сгруппировать элементы дискретного вариационного ряда. Пусть в ходе отбора значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раза, …, x_k – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

О п р е д е л е н и е . ***Статистическим рядом*** называется последовательность различных элементов выборки $x_1,\ x_2, ..., x_k$, расположенных в возрастающем порядке с указанием частот $n_1,\ n_2, ..., n_k$, с которыми эти элементы содержатся в выборке, или относительных частот $n_i/n = w_i = p_i^*$.

Статистический ряд обычно записывается в виде таблицы:

x	x_1	x_2	…	x_k
n	n_1	n_2	…	n_k

$\left(\sum n_k = n\right.$ – объем выборки$\left.\right)$

или

X	x_1	x_2	…	x_k
p^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

$\left(\sum p_i^* = 1.\right)$

Такой ряд называют ***группированным статистическим рядом***.

Статистический ряд наглядно можно изобразить в виде ***полигона частот*** (***полигона относительных частот***), откладывая по оси ординат частоты $n_k\ (k = 1, 2, ..., n)$ (относительные частоты n_i/n). Полученные точки плоскости соединяются отрезками.

Рассмотрим функциональный способ описания выборки.

О п р е д е л е н и е. ***Эмпирической*** (***выборочной***) ***функцией распределения*** (кумулятой) называется относительная частота события $X < x$, полученная по данной выборке:

$$F_n^*(x) = p^*(X < x).$$

Для получения относительной частоты $p^*(X < x)$ просуммируем в статистическом ряде, построенном по данной выборке, все частоты n_i, для которых элементы x_i статистического ряда меньше x. Тогда $p^*(X < x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i$. Получаем

$$\boxed{F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i = \frac{n_x}{n}}, \tag{1.1}$$

где n – объем выборки, n_x – число наблюдений меньших x ($x \in R$).

Формула (1.1) определяет функцию распределения дискретной случайной величины X^*, заданной таблицей распределения.

X^*	x_1	x_2	…	x_k
P^*	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$

Эмпирическая функция распределения является приближенным значением генеральной функции распределения

$$F_n^*(x) \approx F(x).$$

Данная функция называется эмпирической, потому что была получена эмпирическим путем (в результате исследования).

Интегральная функция $F(x)$ распределения генеральной совокупности называется теоретической функцией распределения (в отличие от эмпирической функции распределения выборочной совокупности).

Теоретическая функция $F(x)$ характеризует вероятность события X, а эмпирическая функция $F_n^*(x)$ характеризует относительную частоту данного события.

Функция $F_n^*(x)$ обладает всеми свойствами функции $F(x)$, а именно:

1) $0 \le F_n^*(x) \le 1$;

2) $F_n^*(x)$ – неубывающая кусочно-постоянная функция, имеющая в точках x_i скачки равные p_i^*;

3) если x_1 – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, то $F_n^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F_n^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Пример 1.1. Построить полигон частот, относительных частот, эмпирическую функцию распределения, определить размах по данной выборке:

5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.

► Объем выборки $n = 15$. Упорядочив элементы выборки по величине, получим вариационный ряд

2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.

Размах выборки

$$R = 10 - 2 = 8.$$

Различными в заданной выборке являются элементы $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5,\ x_5 = 7,\ x_6 = 10$; их частоты соответственно равны $n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 2,\ n_4 = 3,\ n_5 = 4,\ n_6 = 2$. Следовательно, статистический ряд исходной выборки можно записать в виде следующей таблицы:

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

Для контроля правильности записи находим $\sum n_i = 15$.

Полигон частот для статистического ряда:

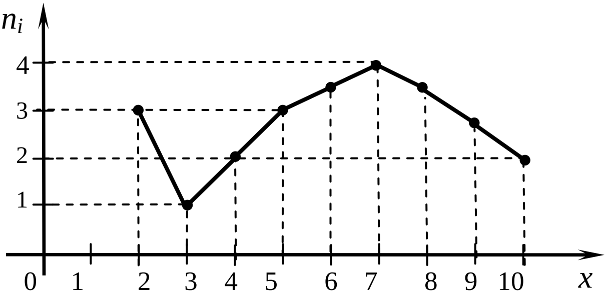


Рис. 1

Найдем распределение относительных частот: $p_i^* = n_i / n$. Статистический ряд имеет вид:

x_i	2	3	4	5	7	10
$p_i^* = n_i / n$	1/5	1/15	2/15	1/5	4/15	2/15

Проверка: $\sum_i p_i^* = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = 1$.

Эмпирическую функцию распределения определим по формуле (1.1). Наименьшая варианта $x_1 = 2$, $n = 15$, следовательно, $F_{15}^*(x) = 0$ при $x \le 2$. Значение $x < 3$ $(x_1 = 2)$ наблюдалось 3 раза, поэтому $F_{15}^*(x) = 3/15$, $2 < x \le 3$; значение $x < 4$, т.е. $x_1 = 2, x_2 = 3$ наблюдалось 4 раза; имеем $F_{15}^*(x) = 4/15$, $3 < x \le 4$, и т.д. Окончательно получим:

$$F_{15}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2; \\ 3/15 & \text{при} \quad 2 < x \le 3; \\ 4/15 & \text{при} \quad 3 < x \le 4; \\ 6/15 & \text{при} \quad 4 < x \le 5; \\ 9/15 & \text{при} \quad 5 < x \le 7; \\ 13/15 & \text{при} \quad 7 < x \le 10; \\ 1 & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$$

Замечание: Эмпирическую функцию распределения можно получить, если в статистическом ряде последовательно просуммировать относительные частоты.

График эмпирической функции распределения приведен на рис.2.

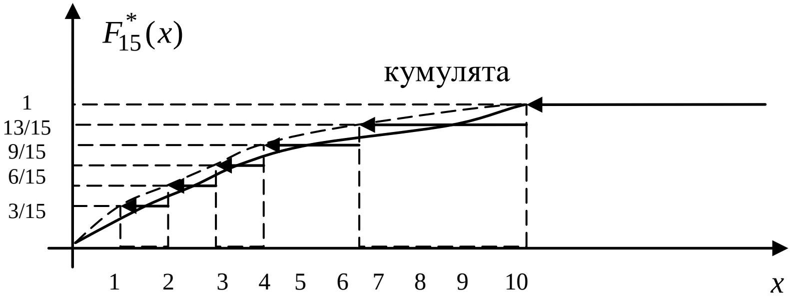


Рис. 2 ◄

Пример 1.2. По результатам распределения 100 рабочих механического цеха по тарифным разрядам найдена эмпирическая функция распределения:

$$F_{100}^{*}(x)=\begin{cases} 0 & \text{если} \quad x\le 1; \\ 0{,}04 & \text{если} \quad 1<x\le 2; \\ 0{,}10 & \text{если} \quad 2<x\le 3; \\ 0{,}26 & \text{если} \quad 3<x\le 4; \\ 0{,}52 & \text{если} \quad 4<x\le 5; \\ 1 & \text{если} \quad x>5. \end{cases}$$

Определить количество рабочих цеха, имеющих третий тарифный разряд.

► Находим относительную частоту рабочих цеха, имеющих третий тарифный разряд, из условия задачи и определения эмпирической функции распределения. Имеем $p_i{}^* = 0{,}26 - 0{,}10 = 0{,}16$.

Тогда искомое количество рабочих равно

$$n_i = p_i * \cdot n = 0{,}16 \cdot 100 = 16 .$$ ◄

1.3. ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД. ГИСТОГРАММА

Если выборка получена из непрерывной генеральной совокупности и объем ее большой, то вариационный и статистический ряды, как и сама выборка, будут трудно обозримыми множествами. Нецелесообразно также построение дискретного ряда для дискретной СВ, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует построить интервальный (вариационный) ряд распределения.

О п р е д е л е н и е . ***Интервальным вариационным рядом*** (***ИВР***) называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений СВ с соответствующими частотами или частостями (относительными частотами) попаданий в каждый из них значений величины:

$[a;b]$	$[x_0;x_1)$	$[x_1;x_2)$	…	$[x_{k-1};x_k]$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n ,$$

где $[x_{i-1};x_i)$ – интервалы группировки, причем n_i – частота попаданий в интервал $[x_{i-1};x_i)$; $a = x_0$, $x_k = b$.

Вместо частот n_i можно рассматривать относительные частоты: $p_i * = \dfrac{n_i}{n}$.

Пример 1.3. Проведены измерения диаметра валиков после шлифовки. Данные помещены в таблицу 1. Построить интервальный вариационный ряд.

► Рассмотрим способ группировки элементов выборки (таблица 1). Здесь $x_{\min} = 6{,}68$, $x_{\max} = 6{,}83$. Найдем размах варьирования

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 6{,}83 - 6{,}68 = 0{,}15\,.$$

Для определения величины частичного интервала воспользуемся формулой Стерджеса

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322\,\lg n} = \frac{R}{m}\,,$$

где n – объем выборки, m – число интервалов.

Таблица 1

6,75	6,77	6,77	6,73	6,76	6,74	6,70	6,75	6,71	6,72	6,77	6,79	6,71	6,78
6,73	6,70	6,73	6,77	6,75	6,75	6,71	6,70	6,78	6,76	6,81	6,69	6,80	6,80
6,77	6,68	6,74	6,70	6,70	6,74	6,77	6,83	6,76	6,76	6,82	6,77	6,71	6,74
6,77	6,75	6,74	6,77	6,72	6,74	6,80	6,75	6,80	6,72	6,78	6,75	6,70	6,75
6,78	6,78	6,76	6,77	6,74	6,74	6,77	6,73	6,74	6,77	6,74	6,75	6,74	6,76
6,76	6,74	6,74	6,74	6,74	6,76	6,74	6,72	6,80	6,76	6,78	6,73	6,70	6,76
6,76	6,77	6,75	6,78	6,72	6,76	6,78	6,68	6,75	6,73	6,82	6,73	6,80	6,81
6,71	6,82	6,77	6,80	6,80	6,70	6,70	6,82	6,72	6,69	6,73	6,76	6,74	6,77
6,72	6,76	6,78	6,78	6,73	6,76	6,80	6,76	6,72	6,76	6,76	6,70	6,73	6,75
6,77	6,77	6,70	6,81	6,74	6,73	6,77	6,74	6,78	6,69	6,74	6,71	6,76	6,76
6,77	6,70	6,81	6,74	6,74	6,77	6,75	6,80	6,74	6,76	6,77	6,77	6,81	6,75
6,78	6,73	6,76	6,76	6,76	6,77	6,76	6,80	6,77	6,74	6,77	6,72	6,75	6,76
6,77	6,81	6,76	6,76	6,76	6,80	6,74	6,80	6,74	6,73	6,75	6,77	6,74	6,76
6,77	6,77	6,75	6,76	6,74	6,82	6,76	6,73	6,74	6,75	6,76	6,72	6,78	6,72
6,76	6,77	6,75	6,78										

Здесь n=200. Поэтому

$$h = 0{,}15/(1 + 3{,}322\,\lg 200) \approx 0{,}0174 \approx 0{,}02\,.$$

За начало первого интервала возьмем величину

$$x_{\text{нач}} = x_{\min} - 0{,}5h = 6{,}68 - 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 6{,}67\,.$$

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h ($h = 0{,}02$). Затем считают число вариант, попавших в каждый интервал.

По результатам разбиения составим интервальный вариационный ряд.

Таблица 2

№№ п/п	Диаметр валика после шлифовки (интервалы), мм	Частоты n_i	Относительные частоты $p_i * = \frac{n_i}{n}$	$\frac{p_i *}{h}$
1	6,67 – 6,69	2	0,010	0,5
2	6,69 – 6,71	15	0,075	3,75
3	6,71 – 6,73	17	0,085	4,25
4	6,73 – 6,75	44	0,220	11,0
5	6,75 – 6,77	52	0,260	13,0
6	6,77 – 6,79	44	0,220	11,0
7	6,79 – 6,81	14	0,070	3,5
8	6,81 – 6,83	11	0,055	2,75
9	6,83 – 6,85	1	0,005	0,25
Σ		200	1	

◄

Графическим изображением интервального вариационного ряда служит гистограмма.

Гистограммой частот (***относительных частот***) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны n_i/h (***плотность частоты***) или p_i*/h (***плотность относительной частоты***). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ – сумме частот n_i вариант, попавших в i-й интервал. ***Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n.***

Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

По таблице 2 построим гистограмму относительных частот (рис. 3).

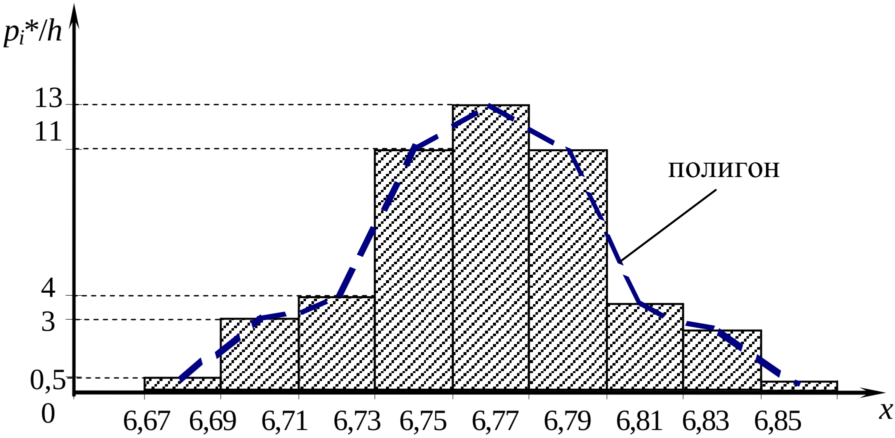


Рис. 3

Гистограмма частот является статистическим аналогом дифференциальной функции распределения (плотности) $f(x)$ СВ X.

Для графического изображения интервального вариационного ряда можно использовать полигон, если этот ряд преобразовать в дискретный. В этом случае интервалы заменяют их серединными значениями x_i^* и ставят им в соответствие интервальные частоты n_i $(i=1, 2, ..., k)$. Для полученного дискретного ряда (таблица 3) строят полигон (на рис. 3 – пунктирная линия).

Если в интервальном вариационном ряде интервалы $[x_{i-1}; x_i)$ заменить серединами интервалов: $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, то получим ***группированный статистический ряд***. Наряду с частотами подсчитываются относительные частоты $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$.

Таким образом, группированный статистический ряд из примера 3 имеет вид:

Таблица 3

x_i^*	Частоты n_i	Относительные частоты $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$
6,68	2	0,010
6,70	15	0,075
6,72	17	0,085
6,74	44	0,220
6,76	52	0,260
6,78	44	0,220
6,80	14	0,070
6,82	11	0,055
6,84	1	0,005
$\sum$	200	1

Выборочной модой Мо дискретного вариационного ряда называется элемент выборки x_i, которому соответствует наибольшая частота. Например, в таблице 3 Мо = 6,76.

Медиана Ме – это значение варианты, которое делит вариационный ряд на две части, содержащие равное число элементов.

$$\text{Me} = \begin{cases} x_l & \text{при} \quad n = 2l + 1; \\ \dfrac{x_l + x_{l+1}}{2} & \text{при} \quad n = 2l. \end{cases}$$

Например, в распределении

12 14 16 18 20 22 24 26 28

медианой будет центральная варианта, то есть Ме = 20.

Для ряда с четным числом членов 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 медианой будет полусумма его центральных членов, то есть

$$\text{Me} = \frac{14 + 16}{2} = 15 .$$

Для определения моды интервальных рядов служит формула

$$\text{Mo} = x_{\text{ниж}} + h \cdot \left(\frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 + n_3} \right), \tag{1.2}$$

где $x_{\text{ниж}}$ – нижняя граница ***модального класса***, то есть класса с наибольшей частотой n_2; n_2 – частота модального класса; n_1 – частота класса, предшествующего модальному; n_3 – частота класса, следующего за модальным; h – ширина классового интервала.

Для интервального вариационного ряда медиана вычисляется по следующей формуле:

$$\mathrm{Me} = x_i + h \cdot \frac{n/2 - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1})}{n_i},$$

где x_i – начало медианного интервала, т.е. интервала, в котором содержится серединный элемент; h – длина медианного интервала; n – объем выборки; $T_{i-1} = n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1}$ – сумма частот интервалов, предшествующих медианному; n_i – частота медианного интервала.

Пример 1.4. Определить моду и медиану распределения роста 1000 взрослых мужчин:

Рост, см	Число мужчин	Рост, см	Число мужчин
143 – 146	1	167 – 170	170
146 – 149	2	170 – 173	120
149 – 152	8	173 – 176	64
152 – 155	26	176 – 179	28
155 – 158	65	179 – 182	10
158 – 161	120	182 – 185	3
161 – 164	181	185 – 188	1
164 – 167	201		

► Нижняя граница модального класса $x_{\text{ниж.}} = 164$, частота модального класса $n_2 = 201$. Частота класса, предшествующего модальному, $n_1 = 181$; частота класса, следующего за модальным, $n_3 = 170$; $h = 3$. Подставив эти данные в формулу (1.2), находим

$$\mathrm{Mo} = 164 + \frac{3 \cdot (201 - 181)}{2 \cdot 201 - 181 + 170} = 164{,}15.$$

Начало медианного интервала $x_0 = 164$, $k = 3$, $n = 1000$,

$T_{i-1} = 1+2+8+26+65+120+181 = 403, n_i = 201$. Вычислить медиану

$$M_e = 164 + 3 \cdot \frac{1000/2 - 403}{201} = 165{,}4\,см$$ ◄

1.4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБОРОЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$ проведена выборка объема n. Значения $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$. Статистический ряд имеет вид:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

(1.3)

причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, n – объем выборки.

Числовые характеристики этого выборочного распределения называются ***выборочными*** (***эмпирическими***) ***числовыми характеристиками***.

Наиболее употребительными из них являются характеристики положения и рассеяния выборки, а также выборочные моменты. Все они характеризуют выборку, а через нее и генеральную совокупность, являясь аналогами соответствующих генеральных числовых характеристик.

Выборочное среднее и выборочная дисперсия

Выборочной средней называется среднее арифметическое значений выборочной совокупности (взвешенная оценка):

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n}}. \qquad (1.4)$$

Из теоремы Бернулли следует, что выборочное среднее $\bar{x}$ стремится к математическому ожиданию той случайной величины, значения которой образуют группированный ряд, если объем выборки n стремится к бесконечности.

Свойства выборочной средней

1. Выборочная средняя постоянной равна самой постоянной $\overline{C} = C$
2. Если все варианты умножить на одно и то же число, то имеет место равенство: $\overline{CX} = C\overline{X}$
3. Если все варианты увеличить (уменьшить) на одно и то же число, то средняя арифметическая увеличится (уменьшится) на то же число, т.е. $\overline{X + C} = \overline{X} + C$.
4. Если все частоты вариантов умножить на одно и то число, то средняя арифметическая не изменится.

Для характеристики рассеяния наблюдаемых значений количественного признака вокруг своего среднего значения $\bar{x}$ вычисляют выборочную дисперсию.

Выборочная дисперсия – среднее арифметическое квадратов отклонения вариант от их среднего значения:

$$\boxed{D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i} \tag{1.5}$$

Можно показать, что $D_в$ может быть подсчитана также по формуле: $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\bar{x}_в\right)^2$, т.е.

$$D_в = \overline{x^2} - \left[\bar{x}\right]^2. \tag{1.6}$$

Здесь $\bar{x} = \overline{x_в}$.

Таким образом, дисперсия равна разности между средним квадратов признака x и квадратом средней x .

Для несгруппированного ряда $\left(n_i = 1, i = 1,2,..k, k = n\right)$ (то есть все значения $x_i, i=\overline{1,n}$, различны) из формулы (1.4) получаем ***выборочное среднее***

$$\boxed{\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}, \qquad (1.4')$$

а из формулы (1.5) – выборочную дисперсию (1.5′).

$$\boxed{D_в=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}. \qquad (1.5')$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}\,. \qquad (1.7)$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю:
   D(C)) = 0.
2. Если все варианты увеличить (уменьшить) на одно и то же число С, то дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменятся, т.е.
   D(X + C) = D(X), σ (X + C) =σ (X).
3. Если все варианты умножить на одно и то же число, то имеет место равенство:
   D(CX) = C^2 D (X), σ (CX) = Cσ(X).

4. Если все частоты вариантов умножить на одно и то же число, то дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменятся.

Коэффициентом вариации V называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней

$$\bar{V}=\frac{\sigma_в}{\bar{x}}\cdot 100\% \qquad \left(\bar{x}\neq 0\right). \qquad (1.7')$$

Выборочное среднее $\bar{x}$, выборочная дисперсия $D_в$ и другие характеристики вариационного ряда являются статистическими аналогами математического ожидания $M\left(X\right)$, дисперсии $D=\sigma^2$ и соответствующих характеристик случайной величины X.

Для интервального вариационного ряда формулы для выборочных средних будут такими же, но за значения $x_1, x_2, ..., x_k$ можно брать не концы промежутков $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, ..., а их середины $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$.

Пример 1.5. По данным таблицы 3 вычислить статистическое среднее $\bar{x}$ (среднее арифметическое диаметра валика), выборочную дисперсию $D_в$ и коэффициент вариации.

► Вычислим $\bar{x}$ и $D_в$ по формулам (1.4), (1.5):

$\bar{x}$ =6,68 · 0,010 + 6,70 · 0,075 + 6,72 · 0,085 + 6,74 · 0,220 + 6,76 · 0,260 + + 6,78 · 0,220 + 6,80 ·0,070 + 6,82 ·0,055 + 6,84 · 0,005 ≈ 6,758.

$$D_в = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{9}(x_i - 6{,}758)^2 \cdot n_i =$$

$$= \frac{1}{200}\Big[(6{,}68 - 6{,}758)^2 \cdot 2 + (6{,}70 - 6{,}758)^2 \cdot 15 + (6{,}72 - 6{,}758)^2 \cdot 17 +$$

$$+ (6{,}74 - 6{,}758)^2 \cdot 44 + (6{,}76 - 6{,}758)^2 \cdot 52 + (6{,}78 - 6{,}758)^2 \cdot 44 +$$

$$+ (6{,}80 - 6{,}758)^2 \cdot 14 + (6{,}82 - 6{,}758)^2 \cdot 11 + (6{,}84 - 6{,}758)^2 \cdot 1\Big] \approx 0{,}00098.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = 0{,}031. \quad .$$

Коэффициент вариации вычислим по формуле (1. 7′)

$$\bar{V} = \frac{\sigma_в}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0{,}031}{6{,}758} \cdot 100\% = 0{,}46\%.$$ ◄

Пример 1.6. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

► Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = 2 .$$

Вычислим дисперсию по формуле 1.6. Имеем:

$$\overline{x^2} = \frac{1 \cdot 20 + 2^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 10 + 4^2 \cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = 5 ,$$

$$D_в = 5 - 2^2 = 1 .$$

Теперь вычислим дисперсию по определению (формула 1.5).

◄

$$D_в = \frac{20 \cdot (1 - 2)^2 + 15 \cdot (2 - 2)^2 + 10 \cdot (3 - 2)^2 + 5 \cdot (4 - 2)^2}{20 + 15 + 10 + 5} = 1 .$$

НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Начальным эмпирическим моментом порядка l называется среднее значение l–степеней выборочной совокупности

$$\bar{\nu}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^{\,l}\, n_i . \qquad (1.8)$$

Очевидно, что $\bar{\nu}_1 = \bar{x}$, то есть начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней $\bar{x}$.

Центральный эмпирический момент $\bar{\mu}_l$ порядка l определяется по формуле

$$\bar{\mu}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^l n_i . \qquad (1.9)$$

Центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии $D_в$, а центральный момент первого порядка для любого распределения равен нулю.

Коэффициентом асимметрии (***скошенности***) статистического ряда называется число

$$\tilde{A} = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma_в^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 n_i}{n \cdot \sigma_в^3}, \tag{1.10}$$

где $\sigma_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

Если $\tilde{A} = 0$, то распределение имеет симметричную форму, то есть варианты, равноудаленные от $\overline{x}$, имеют одинаковую частоту. При $\tilde{A} > 0$ $(\tilde{A} < 0)$ говорят о ***положительной*** (***правосторонней***) или ***отрицательной*** (***левосторонней***) ***асимметрии***, т.е. асимметрия положительна, если вытянут правый участок кривой, и отрицательна, если левый.

Эксцессом статистического ряда называется число

$$\overline{E} = \frac{\overline{\mu}_4}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^4 n_i}{n \cdot \sigma_в^4} - 3. \tag{1.11}$$

Эксцесс является показателем "крутости" вариационного ряда по сравнению с нормальным распределением. Эксцесс нормально распределенной случайной величины равен нулю.

Если $\overline{E} > 0$ $(\overline{E} < 0)$, то полигон вариационного ряда имеет более крутую (пологую) вершину по сравнению с нормальной кривой.

Пример 1.7. По данным таблицы 3 вычислить коэффициент асимметрии и эксцесс распределения диаметра валика.

► Определим центральный эмпирический момент третьего порядка:

$$\overline{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 n_i =$$

$$= \frac{1}{200}\left[(6{,}68 - 6{,}758)^3 \cdot 2 + (6{,}70 - 6{,}758)^3 \cdot 15 + (6{,}72 - 6{,}758)^3 \cdot 17 + \right.$$

$$+ (6{,}74 - 6{,}758)^3 \cdot 44 + (6{,}76 - 6{,}758)^3 \cdot 52 + (6{,}78 - 6{,}758)^3 \cdot 44 +$$

$$\left. + (6{,}80 - 6{,}758)^3 \cdot 14 + (6{,}82 - 6{,}758)^3 \cdot 11 + (6{,}84 - 6{,}758)^3 \cdot 1 \right] = -0{,}000015\,.$$

Из примера 5 выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$ = 0,32. Вычислим коэффициент асимметрии

$$\tilde{A} = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma_в^3} = -\frac{0{,}000015}{0{,}44^3} = -0{,}00018 .$$

Определим центральный эмпирический момент четвертого порядка:

$$\overline{\mu}_4 = \frac{1}{200}\Big[(6{,}68-6{,}758)^4 \cdot 2 + (6{,}70-6{,}758)^4 \cdot 15 + (6{,}72-6{,}758)^4 \cdot 17 +$$

$$+ (6{,}74-6{,}758)^4 \cdot 44 + (6{,}76-6{,}758)^4 \cdot 52 + (6{,}78-6{,}758)^4 \cdot 44 +$$

$$+ (6{,}80-6{,}758)^4 \cdot 14 + (6{,}82-6{,}758)^4 \cdot 11 + (6{,}84-6{,}758)^4 \cdot 1\Big] = 0{,}000003 .$$

Вычислим эксцесс статистического ряда по формуле (1.11)

$$\overline{E} = \frac{\overline{\mu}_4}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{0{,}000003}{0{,}44^4} - 3 = -2{,}9999 .$$

В силу того, что коэффициент асимметрии $\tilde{A}$ отрицателен и близок к нулю, распределение диаметра валика обладает незначительной левосторонней асимметрией, а поскольку эксцесс $\overline{E} < 0$, полигон статистического ряда (рис. 3) имеет более пологую вершину по сравнению с нормальной кривой.

ГЛАВА 2

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Основная задача математической статистики состоит в нахождении распределения наблюдаемой случайной величины *X* по данным выборки. Во многих случаях вид распределения *X* можно считать известным, и задача сводится к получению приближенных значений неизвестных параметров этого распределения. Например, если удалось установить, что количественный признак подчиняется показательному закону распределения вероятностей, тогда необходимо оценить параметр λ, по которому определяется данное распределение.

Пусть $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X, содержащая один неизвестный параметр θ, а $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений этой случайной величины. ***Точечной оценкой*** $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра θ называется приближенное значение этого параметра, полученное по выборке.

Точечная оценка параметра – это оценка, которая характеризуется одним конкретным числом.

Выборочная средняя $\bar{x}$ и выборочная дисперсия $D_в$ являются точечными оценками математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ соответственно.

Очевидно, что оценка $\tilde{\theta}$ есть значение некоторой функции элементов выборки, то есть $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Любую функцию элементов выборки называют ***статистикой***.

Полученные при обработке выборочной совокупности с объемом n оценки числовых случайных величин являются случайными числами, поэтому их подвергают статистическому анализу.

Качество оценки устанавливается по трем свойствам: быть состоятельной, эффективной и несмещенной.

Точечная оценка называется ***состоятельной***, если при увеличении объема выборки выборочная характеристика стремится к соответствующей характеристике генеральной совокупности.

Точечная оценка называется ***эффективной***, если она имеет наименьшую дисперсию выборочного распределения по сравнению с другими аналогичными оценками.

Относительная частота события $P^*(A) = \dfrac{m}{n}$ (m – число появлений события A в n опытах) является ***состоятельной оценкой вероятности этого события***:

$$P^*(A)\xrightarrow[n\to\infty]{P}P(A),$$

что следует из предельной теоремы Бернулли теории вероятностей.

Выборочное среднее $\bar{x}$ является ***состоятельной оценкой математического ожидания*** $M(X)$:

$$\bar{x}\xrightarrow[n\to\infty]{P}M(X),$$

что следует непосредственно из теоремы Чебышева теории вероятностей.

В случае использования состоятельных оценок оправдывается увеличение объема выборки, так как при этом становятся маловероятными значительные ошибки при оценивании. Поэтому практический смысл имеют только состоятельные оценки.

Точечную оценку $\tilde{\theta}$ называют ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки, то есть $M(\tilde{\theta})=\theta$.

.

Если это равенство не выполняется, то оценка $\tilde{\theta}_n$, полученная по разным выборкам, будет в среднем либо завышать значение θ (если $M(\tilde{\theta})>\theta$), либо занижать его (если $M(\tilde{\theta})<\theta$). Таким образом, требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании.

Разность $M(\tilde{\theta})-\theta$ называется ***смещением***. Для несмещенных оценок систематическая оценка оценивания равна нулю.

Точечную оценку называют **смещенной**, если ее математическое ожидание не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной состоятельной оценкой генеральной средней (математического ожидания $m=M(X)$) служит выборочная средняя $\bar{x}$.

Выборочная дисперсия $D_в$ не обладает свойством несмещенности. ***Смещенной оценкой генеральной дисперсии*** $D_г = \sigma^2$ служит выборочная дисперсия $D_в$, определяемая по формуле (1.5). Эта оценка является смещенной, так как

$$M\left(D_в\right) = \frac{n-1}{n} D_г .$$

На практике используют "*исправленную*" выборочную дисперсию S^2, которая является ***несмещенной состоятельной оценкой дисперсии генеральной совокупности***:

$$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1} \mathrm{D}_в}, \tag{2.1}$$

Для сгруппированной выборки (1.3) S^2 вычисляется по формуле:

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i}. \tag{2.2}$$

а для несгруппированной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n_i = 1, k = n)$ S^2:

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}, \tag{2.3}$$

Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется ***«исправленным» средним квадратическим отклонением***.

Пример 2.1. На основании выборки объемом $n = 6$ найдена смещенная оценка генеральной совокупности $D_в = 3$. Найти несмещенную оценку дисперсии.

► По формуле (2.1) находим $S^2 = \frac{6}{6-1} \cdot 3 = 3{,}6$.

При $n > 50$ практически нет разницы между $D_в$ и S^2. Оценки $D_в$ и S^2 являются состоятельными оценками генеральной дисперсии $D_г$. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$. ◄

Выборочная средняя $\bar{x}$ является ***состоятельной оценкой генеральной средней***.

Пример 2.2. В результате пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических погрешностей) получены следующие результаты (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найти несмещенную оценку длины стержня.

► Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{92+94+103+105+106}{5} = 100 .$$ ◄

"*Исправленное*" среднее квадратическое отклонение равно корню квадратному из исправленной дисперсии

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}.$$

2.2. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ (БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ) ПО ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЕ

Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Требуется оценить неизвестную вероятность p по относительной частоте, то есть надо найти ее точечную и интервальную оценки.

Точечная оценка. В качестве точечной оценки неизвестной вероятности p принимают относительную частоту

$$p^* = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события A; n – число испытаний.

Эта оценка несмещенная, то есть математическое ожидание равно оцениваемой вероятности. Так как $M(m) = np$, то

$M(p^*) = M(m/n) = M(m)/n = np/n = p$.

Найдем дисперсию оценки. Так как $D(m) = npq$, то

$D(p^*) = D(m/n) = D(m)/n^2 = npq/n^2 = pq/n$.

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{D(p^*)} = \sqrt{pq/n}.$$

Для оценки точности приближенного равенства $p \approx p^*$ вероятность того, что ошибка этого равенства не превосходит ε определяется по формуле:

$$P\{|p^* - p| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{p^*}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right),$$

где $\Phi(z)$– функция Лапласа, p – вероятность появления события, $q = 1 - p$.

Пример 2.3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклоняется от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

► По условию, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, ε =0,04;

$$P\left(\left|p^* - 0{,}2\right| \le 0{,}04\right) = 0{,}99.$$

Поэтому имеем:

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{n}{0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = 0{,}99,$$

или $\Phi(0.1\sqrt{n})$=0,495.

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(2,75)=0,495$. Следовательно, $0,1\sqrt{n} \geq 2,57$, $n \geq 660,5$.

Таким образом, искомое число испытаний $n = 661$. ◄

2.3. МЕТОД МОМЕНТОВ ДЛЯ ТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Метод моментов был предложен английским ученым К.Пирсоном. Он состоит в следующем: пусть дана случайная выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из генеральной совокупности X с плотностью вероятности $f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$, где $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ – неизвестные параметры, подлежащие оцениванию. ***Метод моментов*** заключается в приравнивании теоретических моментов ν_l к соответствующим эмпирическим моментам того же порядка $\overline{\nu_l}$, являющимися функциями от неизвестных параметров. Для ДСВ:

$$\nu_l = M(X^l) \text{ – начальный момент;}$$

$$\mu_l = M(X - M(X))^l \text{ – центральный момент,}$$

для НСВ:

$$\nu_l = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x)dx \text{ – начальный момент;}$$

$$\mu_l = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^l f(x)dx \text{ – центральный момент.}$$

Если распределение определяется ***одним параметром***, то для его отыскания приравнивают один теоретический момент одному эмпирическому моменту того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка: $\nu_1 = \overline{\nu_1}$. Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$ – математическое ожидание и $\overline{\nu_1} = \bar{x}$, где $\bar{x}$

– выборочное среднее, определяемое формулами (1.4), (1.4′), получим

$$M(X) = \bar{x}. \tag{2.4}$$

Математическое ожидание $M(X)$ является функцией от неизвестного параметра заданного распределения, поэтому, решив уравнение (2.4) относительно неизвестного параметра, тем самым получим его точечную оценку.

Если распределение определяется ***двумя параметрами***, то приравнивают два теоретических момента двум соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Например, можно приравнять начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эмпирическому моменту второго порядка:

$$\nu_1 = \overline{\nu_1}, \qquad \mu_2 = \overline{\mu_2}.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X)$, $\overline{\nu_1} = \bar{x}$, $\mu_2 = D(X)$ – генеральная дисперсия, $\overline{\mu_2} = D_в = \sigma_в^2$ – выборочная дисперсия, имеем

$$\begin{cases} M(X) = \bar{x}; \\ D(X) = \mathrm{D_в}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Левые части этих равенств являются функциями от неизвестных параметров, поэтому, решив систему (2.5) относительно неизвестных параметров, тем самым получим их точечные оценки.

Пример 2.4. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность вероятности которого

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0. \end{cases}$$

► Приняв во внимание, что математическое ожидание показательного распределения $M(X) = 1/\lambda$, из уравнения (2.4) получаем

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{x}\,.$$

Отсюда

$$\lambda^* = n \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{\bar{x}}\,. \tag{2.6}$$

Итак, искомая точечная оценка параметра λ показательного распределения равна величине, обратной выборочной средней (1.4), (1.4′). ◄

Пример 2.5. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечные оценки неизвестных параметров m и σ нормального распределения X:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

► Приравняем начальные теоретические и эмпирические моменты первого порядка, а также центральные и эмпирические моменты второго порядка:

$$\nu_1 = \bar{\nu}_1, \qquad \mu_2 = \bar{\mu}_2\,.$$

Учитывая, что $\nu_1 = M(X),\ \mu_2 = D(X),\ \bar{\nu}_1 = \bar{x},\ \bar{\mu}_2 = D_в$ получим

$$M(X) = \bar{x}, \quad D(X) = D_в\,.$$

Отсюда имеем: $\begin{cases} m^* = \bar{x}. \\ (\sigma^2)^* = D_в. \end{cases}$ ◄

Аналогичным способом определяются точечные оценки для закона Пуассона, биномиального и геометрического распределения.

Пример 2.6. Пусть величина X распределена по закону Пуассона

$$P_k(X = x_i, \lambda) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i !},$$

где k – число испытаний, произведенных в одном опыте; x_i – число появлений события в i-м опыте. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ, определяющего распределение Пуассона.

► Поскольку математическое ожидание СВ X, распределенной по закону Пуассона, равно параметру λ этого закона, то есть $M(X) = \lambda$, то из уравнения (2.4) вытекает, что точечной оценкой параметра λ распределения Пуассона служит выборочная средняя

$$\lambda^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.7}$$

определяемая по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$. ◄

Упражнение 1. Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметром p (вероятность появления события A в одном испытании):

$$P_k(X = x_i, p) = C_k^{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{k - x_i},$$

где x_i – число появлений события в i-м опыте ($i = 1, 2, \dots, n$); k – количество испытаний в одном опыте.

Оценить методом моментов точечную оценку параметра p (вероятности появления события в одном испытании), определяемой по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$.

Указание: Принять во внимание, что

$$M(X) = kp.$$

Ответ:

$$p^* = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\bar{x}}{k},$$

Упражнение 2. Для геометрического распределения

$$P(X = x_i, p) = (1-p)^{x_i-1}p\,,$$

где x_i – число испытаний, произведенных до появления события, найти методом моментов точечную оценку параметра p (вероятности появления события в одном испытании), определяемую по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$.

Указание. Использовать равенство (2.4) и числовые характеристики для геометрического распределения: $M(X) = \dfrac{1}{p}$.

Ответ:

$$p^* = \frac{1}{\bar{x}} = n\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Упражнение 3. Случайная величина X распределена равномерно, плотность ее

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in (a, b); \\ 0, & x \notin (a, b), \end{cases} \qquad (b > a).$$

Оценить неизвестные параметры a и b по результатам наблюдаемых значений.

Указание. Использовать равенства (2.5) и числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ответ: $a^* = \bar{x} - \sqrt{3D_в}$; $b^* = \bar{x} + \sqrt{3D_в}$.

Пример 2.7. Случайная величина X распределена по закону Пуассона. По результатам наблюдаемых значений 2; 1; 1; 3; 1; 4; 2; 5; 1; 7 оценить неизвестный параметр λ этого распределения.

► Вычислим выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{2*2+1\cdot 4+3+4+5+7}{10} = 2{,}7\,.$$

Так как точечной оценкой параметра λ распределения Пуассона служит выборочная средняя $\bar{x}$, то имеем $\lambda^{*} = 2{,}7$. ◄

Пример 2.8. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами m и σ. По результатам наблюдаемых значений 35; 15; 5; 25; 5 этой случайной величины оценить неизвестный параметр m.

► Поскольку точечная оценка параметра m (математическое ожидание) нормального распределения равна выборочному среднему, то получаем

$$m^{*} = \bar{x} = \frac{35+15+5+25+5}{5} = 17\,.$$ ◄

2.4. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных результатов обработки выборочных данных.

Однако точечные оценки параметров распределения не дают информации о степени близости к соответствующему теоретическому параметру. При выборе малого объема точечная оценка $\tilde{\theta}$ может существенно отличаться от оцениваемого параметра θ. Иногда необходимо знать интервал, в котором будет находиться оцениваемый параметр.

Интервальная оценка – это числовой интервал, который определяется двумя числами – границами интервала, содержащий неизвестный параметр генеральной совокупности (см. рис. 4).

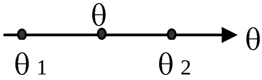


Рис. 4

Чтобы получить представление о точности и надежности полученной оценки в математической статистике пользуются понятиями доверительного интервала и доверительной вероятности.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), который с заранее заданной вероятностью γ содержит (накрывает) истинный параметр θ генеральной совокупности, то есть

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma .$$

Число γ называется ***доверительной вероятностью*** или ***надежностью*** оценки, а значение $\alpha = 1 - \gamma$ – ***уровнем значимости***. Статистики $\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ и $\theta_2 = \theta_2(x_1, x_2, \dots x_n)$, определяемые по выборке $x_1, x_2, \dots x_n$ из генеральной совокупности с неизвестным параметром θ, называются соответственно ***нижней*** и ***верхней границами доверительного интервала***.

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещенной точечной оценки $\tilde{\theta}$, т.е. выбирается интервал вида $(\tilde{\theta} - \Delta, \tilde{\theta} + \Delta)$ такой, что

$$P(|\theta - \tilde{\theta}| < \Delta) = P(\tilde{\theta} - \Delta < \theta < \tilde{\theta} + \Delta) = \gamma .$$

Величину Δ, равную половине ширины доверительного интервала, называют точностью оценки. Чем меньше $|\theta - \tilde{\theta}|$, тем точнее оценка.

Принято надежность оценки задавать заранее. Ее выбор зависит от конкретно решаемой задачи. В качестве вероятности γ берут число, близкое к единице (напр., 0,9; 0,95; 0,99; 0,999). Тогда практически достоверно нахождение параметра θ в доверительном интервале $(\tilde{\theta} - \Delta < \theta < \tilde{\theta} + \Delta)$.

2.5. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ДЛЯ ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Правила построения доверительного интервала для математического ожидания зависят от того, известна или не известна дисперсия генеральной совокупности σ^2.

Пусть из генеральной совокупности X с нормальным законом распределения $N(m, \sigma)$ и известным генеральным средним квадратическим отклонением σ взята случайная выборка $x_1, x_2, \dots x_n$ объемом n и вычислено $\bar{x}$.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания m нормального распределения количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}$ при ***известном среднем квадратическом отклонении*** σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\boxed{\bar{x} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (2.8)$$

где $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \Delta$ – точность оценки; n – объем выборки; z – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(z)$ (приложение 2), при которой $\Phi(z) = \gamma/2$.

2. ***Доверительный интервал*** для математического ожидания m нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии D:

$$\boxed{\bar{x} - t_\alpha(k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\alpha(k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}}, \qquad (2.9)$$

или

$$\boxed{\bar{x} - t_\alpha(k)\frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + t_\alpha(k)\frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}}}, \qquad (2.10)$$

где точность оценки генеральной средней равна

$$\boxed{\Delta = t_\alpha(k)\frac{\sigma_в}{\sqrt{n-1}} = t_\alpha(k)\frac{S}{\sqrt{n}}}, \qquad (2.11)$$

$\sigma_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение; S – "исправленное" выборочное среднее квадратическое отклонение; $t_\alpha(k)$ – критическая точка распределения Стьюдента, где $k = n-1$ – число степеней свободы и $\alpha = 1-\gamma$ (см. приложение 4).

При достаточно больших n различие между доверительными интервалами, определенными формулами (2.9) и (2.10), незначительно, так как при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению.

Пример 2.9. Для проверки срока службы электролампы методом случайной повторной выборки взято 25 ламп. Средний срок их службы оказался равным 980 час. Определить с надежностью 0,9876 интервал, в котором находится средний срок службы лампы в генеральной совокупности в предположении, что срок службы ламп распределен по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 часов.

► Поскольку параметр σ известен, интервальную оценку будем искать по формуле (2.8). Найдем z из соотношения $\Phi(z) = 0{,}9876/2 = 0{,}4938$. По таблице приложения 2 находим $z = 2{,}5$. Подставив $z = 2{,}5$, $\bar{x} = 980$, $\sigma = 20$, $n = 25$ в (2.8), получим доверительный интервал для математического ожидания

$$970 < m < 990.$$ ◄

Пример 2.10. По результатам измерения диаметров 25 корпусов электродвигателя было получено: $\bar{x} = 100$ мм, $\sigma_в = 16$ мм. Предполагая нормальное распределение результата измерения, оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,99.

► Так как σ неизвестна, интервальную оценку генеральной средней m будем искать согласно (2.10).

Все величины, кроме $t_\alpha(k)$, известны. Найдем $t_\alpha(k)$. По таблице приложения 4 при $\alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$ и $k = 25 - 1 = 24$ (для двусторонней области) находим: $t_\alpha(k) = 2{,}8$.

Подставив $\bar{x} = 100$, $t_\alpha(k) = 2{,}8$, $\sigma_в = 16$ в (2.10), получим искомый интервал

$$100 - \frac{2{,}8 \cdot 16}{\sqrt{24}} < m < 100 + \frac{2{,}8 \cdot 16}{\sqrt{24}}$$

или

$$90{,}87 < m < 109{,}13.$$ ◄

Пример 2.11. Фирма коммунального хозяйства желает на основе выборки оценить среднюю квартплату за квартиры определенного типа с надежностью не менее 99% и погрешностью, меньшей 100 руб. Предполагается, что квартплата имеет нормальное распределение со средним квадратичным отклонением, не превышающим 350 руб. Найдите минимальный объем выборки.

► По условию требуется найти такое n, при котором $P(|\bar{x} - m| < 100) \geq 0{,}99$, где m и $\bar{x}$ – генеральная и выборочная средние.

Приравняв $\gamma = 0{,}99$ по таблице приложения 2 найдем число z, при котором $\Phi(z) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}495$; $z = 2{,}6$.

При Δ=100 и $\sigma = 350$ из формулы $z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \Delta$ получим $n = \frac{z^2\sigma^2}{\Delta^2} = 82{,}81$.

Но так как с ростом γ и уменьшением Δ растет n, то $n \geq 82{,}81$ и $n_{\min} = 83$ (заметим, что при уменьшении верхней границы для σ будет уменьшаться и $n_{\min}$).

◄

2.6. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ДЛЯ ДИСПЕРСИИ И СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть из генеральной совокупности *X*, распределенной по нормальному закону $N(m,\sigma)$ (σ – неизвестно), γ – задано, взята случайная выборка объемом *n* и вычислена выборочная дисперсия $D_в$ или S^2 – исправленная выборочная дисперсия.

1) ***Доверительный интервал для дисперсии*** σ^2 нормальной случайной величины при $n \le 30$ имеет вид ($M(X) = m$ неизвестно):

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2(k)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2(k)}} \tag{2.12}$$

или

$$\boxed{\frac{nD_в}{\chi_2^2(k)} < \sigma^2 < \frac{nD_в}{\chi_1^2(k)}}\ , \tag{2.13}$$

где *n* – объем выборки; $D_в$ – выборочная дисперсия (*1.5′*); S^2 – "исправленная" выборочная дисперсия (2.1). Числа $\chi_1^2(k)$ и $\chi_2^2(k)$ находим из таблицы (приложение 3) χ^2-распределения для числа степеней свободы $k = n-1$ и соответственно числам α_1 и α_2:

$$\alpha_1 = \frac{1+\gamma}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2},$$

где γ – доверительная вероятность.

2) ***Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения*** σ нормальной случайной величины при $n \le 30$ имеет вид ($M(x) = m$ неизвестно):

$$\boxed{\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2(k)} < \sigma < \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1(k)}} \tag{2.14}$$

или

$$\boxed{\frac{\sigma_в\sqrt{n}}{\chi_2(k)} < \sigma < \frac{\sigma_в\sqrt{n}}{\chi_1(k)}}, \qquad (2.15)$$

где $\sigma_в$ – выборочное среднее квадратическое отклонение; S – исправленное среднее квадратическое отклонение.

3) Если $M(X) = m$ известно, то ***доверительный интервал для среднеквадратического отклонения*** σ имеет вид:

$$\boxed{\frac{\sqrt{n}\sigma_в}{\chi_2(k)} < \sigma < \frac{\sqrt{n}\sigma_в}{\chi_1(k)}},$$

где n – объем выборки, $\sigma_в = \sqrt{D_в}$, $D_в$ определяется по формуле ($1.5'$). Числа $\chi_1^2(k)$ *и* $\chi_2^2(k)$ находим из таблицы (приложение 3) χ^2 - распределения для числа степеней свободы $k = n$ и соответственно числа α_1 *и* α_2:

$$\alpha_1 = \frac{1+\gamma}{2},\ \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2},$$

где γ – доверительная вероятность.

При достаточно больших объемах выборки ($n > 30$) доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения определяется по формуле

$$\boxed{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}+z_\gamma}\cdot\sigma_в \le \sigma \le \sigma_в\cdot\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}-z_\gamma}},$$

где z_γ – нормированное значение формальной случайной величины, соответствующее заданной надежности γ и определяемое по таблице функции Лапласа (приложение 2).

Пример 2.12. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой величины, имеющей нормальное распределение, причем дисперсия случайных ошибок измерений оказалась равной 0,36. Найти границы, в которых с надежностью 0,95 заключено среднее квадратичное отклонение случайных ошибок n измерений, характеризующих точность прибора.

► Так как $n < 30$, используется χ^2-распределение. Доверительный интервал для σ определяем согласно (2.15). Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1+\gamma}{2} = 0{,}975, \qquad \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}025\,.$$

Числа $\chi_1^2(k)$ и $\chi_2^2(k)$ находим из таблицы приложения 3 по числу степеней свободы $k = n - 1 = 11$ и соответственно числам α_1 и α_2. Имеем $\chi_1^2(k) = 3{,}82$ и $\chi_2^2(k) = 21{,}9$. Отсюда $\chi_1(k) = \sqrt{3{,}82} = 1{,}95$ и $\chi_2(k) = \sqrt{21{,}9} = 4{,}68$. По условию $D_в = 0{,}36$, $\sigma_в = \sqrt{D_в}$, поэтому доверительный интервал для среднего квадратического отклонения:

$$\frac{\sqrt{12 \cdot 0{,}36}}{4{,}68} < \sigma < \frac{\sqrt{12 \cdot 0{,}36}}{1{,}95}$$

или

$$0{,}44 < \sigma < 1{,}07\,.$$

Итак, с надежностью 0,95 среднее квадратическое отклонений случайных ошибок заключено от 0,44 до 1,07. ◄

2.7. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интервальной оценкой (***с надежностью*** γ) ***неизвестной вероятности*** p ***биномиального распределения*** по относительной частоте ω служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2)

$$p_1 < p < p_2,$$

$$p_1 = \frac{n}{z_\gamma^2 + n}\left[\omega + \frac{z_\gamma^2}{2n} - z_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{z_\gamma}{2n}\right)^2}\right],$$

$$p_2 = \frac{n}{z_\gamma^2 + n}\left[\omega + \frac{z_\gamma^2}{2n} + z_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{z_\gamma}{2n}\right)^2}\right],$$

где n – общее число испытаний; m – число появлений события; $\omega = m/n$ – относительная частота; z_γ – значение аргумента функции Лапласа (приложение 2), при котором $\Phi(z_\gamma) = \gamma/2$ (γ – заданная надежность).

Замечание 1. При больших значениях n $(n > 50,\ n\omega > 5,\ n(1-\omega) > 5)$ в качестве приближенных границ доверительного интервала для параметра p биномиального распределения можно принять

$$\boxed{p_1 = \omega - z_\gamma\Delta, \qquad p_2 = \omega + z_\gamma\Delta}, \tag{2.16}$$

где $\omega = \dfrac{m}{n}$, $\Delta = \sqrt{\dfrac{\omega(1-\omega)}{n}}$ – предельная ошибка выборки; z_γ – корень уравнения $\Phi(z_\gamma) = \gamma/2$.

Пример 2.16. При проверке 100 деталей из большой партии обнаружено 10 бракованных деталей.

а) Найти 95 %-ный приближенный доверительный интервал для доли бракованных деталей во всей партии.

б) Какой минимальный объем выборки следует взять для того, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля бракованных деталей во всей партии отличается от частоты появления бракованных деталей в выборке не более чем на 1 %?

► **а)** Найдем относительную частоту бракованных деталей в партии: $\omega = m/n = 10/100 = 0{,}1$. Найдем z_γ из соотношения $\Phi(z_\gamma) = \gamma/2 = 0{,}95/2 = 0{,}475$. По таблице функции Лапласа (приложение 2) находим $z_\gamma = 1{,}96$. Для отыскания границ доверительного интервала используем формулы (2.16). Получим

$$p_1 = 0{,}1 - 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}1(1 - 0{,}1)/100} = 0{,}041,$$

$$p_2 = 0{,}1 + 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}1(1 - 0{,}1)/100} = 0{,}159.$$

95 %-ный доверительный интервал для доли бракованных деталей в партии приближенно имеет вид $0{,}041 < p < 0{,}159$.

б) Представим доверительный интервал в виде неравенства

$$|p - \omega| < z_\gamma \sqrt{\frac{\omega(1 - \omega)}{n}},$$

которое выполняется с вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Так как по условию задачи $|p - \omega| \le 0{,}01$, то для определения n получим неравенство

$$z_\gamma \sqrt{\frac{\omega(1 - \omega)}{n}} \le 0{,}01.$$

Отсюда следует, что

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1(1 - 0{,}1)}{n}} \le 0{,}01$$

и $n \ge (0{,}3 \cdot 196)^2 = 3457{,}44$. Значит, минимальный объем выборки $n = 3458$.

ГЛАВА 3
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
3.1 . ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА

Задание 1

По данной выборке :

1. Найти экстремальные элементы вариационного ряда и размах выборки.
2. Составить статистические ряды частот и относительных частот.
3. Представить выборку графически: построить полигоны частот и относительных частот.
4. Построить эмпирическую функцию распределения.
5. Вычислить числовые характеристики: выборочное среднее $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратичное отклонение $\sigma_в$, исправленную выборочную дисперсию S^2, исправленное выборочное среднее отклонение S, моду M_0^*, медиану Me^* вариационного ряда.
6. Вычислить коэффициент вариации V .
7. Вычислить начальный эмпирический момент второго порядка $\bar{V}_2$.
8. Вычислить коэффициент асимметрии (скошенности) $\widetilde{A}$.
9. Вычислить эксцесс $\overline{E}$ статистического ряда.

Варианты представлены в таблице 4.

Таблица 4.

Каждый вариант содержит выборку из 15 элементов.

№\x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1.1	2	3	4	1	2	3	5	1	6	6	1	6	3	5	3
1.2	6	2	5	3	3	6	2	1	4	5	1	3	3	2	2
1.3	7	5	8	4	1	5	2	1	2	4	4	2	5	8	4
1.4	1	5	5	3	4	6	1	7	4	7	3	4	6	3	4
1.5	2	1	3	3	7	5	1	5	7	6	3	5	6	3	5
1.6	2	4	5	0	4	2	3	6	5	7	1	7	2	0	5
1.7	6	2	3	4	7	1	3	7	3	7	1	5	0	3	5
1.8	8	2	1	0	2	0	0	8	4	5	2	5	4	4	4
1.9	0	1	5	3	0	1	4	6	5	1	3	7	1	3	6
1.10	2	4	0	6	2	1	5	2	6	5	7	1	5	1	8
1.11	3	1	2	6	3	1	5	4	7	0	7	4	1	3	3
1.12	1	2	4	0	6	5	3	6	0	5	2	0	3	5	5
1.13	2	5	7	3	6	4	6	3	6	6	4	6	1	1	4
1.14	0	3	2	3	0	3	4	4	2	5	6	1	2	7	3
1.15	2	3	4	2	1	4	1	5	2	4	1	7	2	4	7
1.16	4	1	3	5	4	3	4	8	2	5	2	5	5	8	8
1.17	0	5	1	4	7	0	5	7	2	6	0	5	2	7	2
1.18	3	5	1	5	6	6	3	7	2	6	8	8	3	8	3
1.19	2	5	3	0	2	3	3	3	0	2	0	1	2	2	0
1.20	0	3	0	7	2	8	7	0	9	9	7	1	7	2	1
1.21	1	4	4	0	2	3	7	5	0	4	7	1	3	4	1
1.22	3	0	3	1	3	7	2	6	4	0	3	4	6	5	8
1.23	2	4	0	3	2	3	1	4	1	5	6	3	1	3	7
1.24	0	6	2	4	5	0	6	4	4	1	5	2	5	3	5
1.25	4	4	2	1	4	7	1	0	5	3	6	1	3	6	7

1.26	1	3	0	3	4	0	5	1	5	2	6	6	0	3	6
1.27	3	6	7	3	0	4	6	1	5	2	6	2	6	3	7
1.28	7	6	0	2	5	5	1	1	7	3	3	4	7	5	7
1.29	7	6	6	3	6	1	4	0	3	5	0	6	1	1	5
1.30	1	3	4	1	5	3	1	2	2	3	4	4	4	3	4

Образец выполнения задания №1.

1. Представив выборку 1, 3, 5, 2, 4, 5, 5, 1, 4, 6, 2, 4, 2, 3, 5 в неубывающем порядке, получим вариационный ряд 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6. Объем выборки n=15. Минимальный и максимальный элементы выборки:

$x_{\min} = 1, x_{\max} = 6$.

Размах выборки: $R = x_{\max} - x_{\min} = 6\text{-}1=5$.

2. Располагаем элементы выборки x_i с соответствующими частотами в виде таблицы (5):

Таблица 5.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	3	2	3	4	1

Статистический ряд относительных частот ($P_i^* = \frac{n_i}{n}$) имеет вид:

Таблица 6.

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i^*	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

3. Так как полигон частот есть ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, n_i), построим точки из таблицы 5. Варианты x_i откладываются на оси абсцисс, а соответствующие частоты n_i на оси ординат (рис.5)

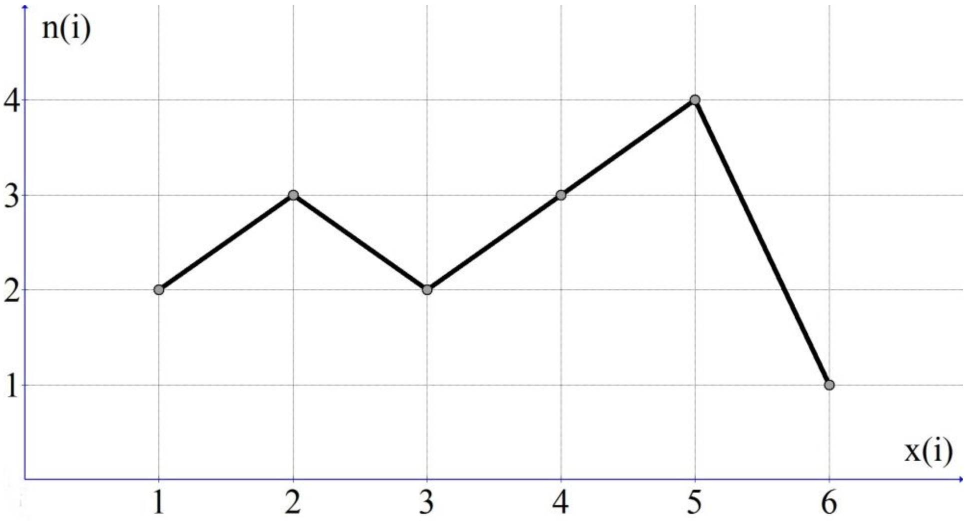


Рис. 5

Воспользовавшись таблицей 6, строим полигон относительных частот (рис.6) .

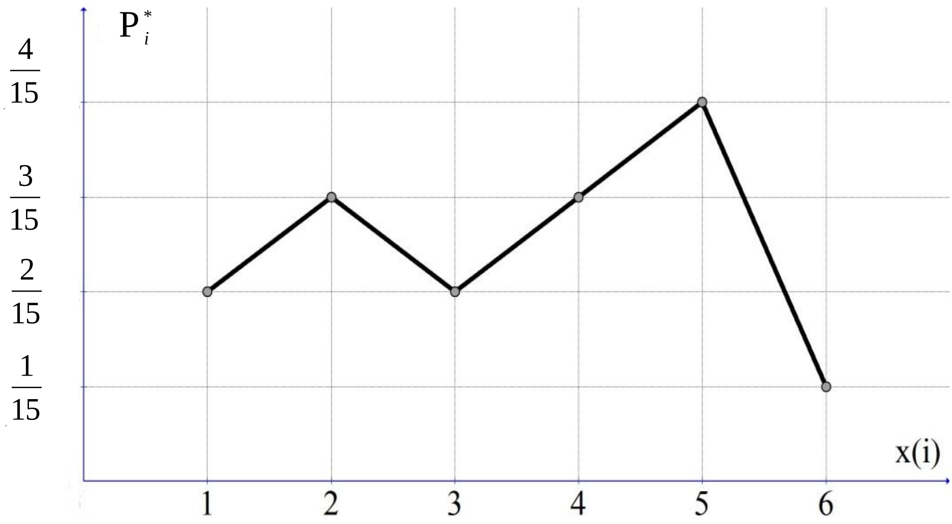


Рис.6

4.Для нахождения эмпирической функции распределения $F_{15}^*(x)$ воспользуемся формулой (1.1) и разобранным примером 1.1.

$$F_{15}^*(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 1, \\ 2/15, & при\ 1 < x \le 2, \\ 5/15, & при\ 2 < x \le 3, \\ 7/15, & при\ 3 < x \le 4, \\ 10/15, & при\ 4 < x \le 5, \\ 14/15, & при\ 5 < x \le 6, \\ 1, & при\ 6 < x. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения имеет вид (рис.7).

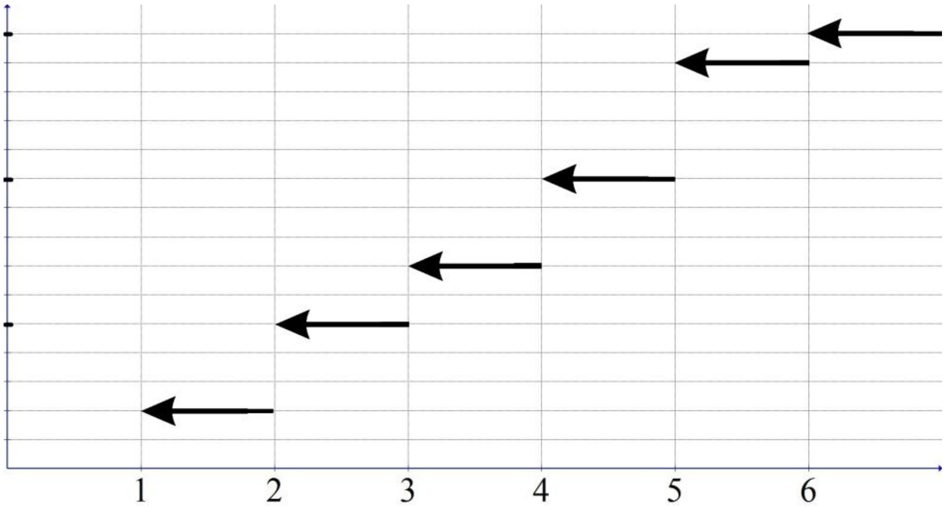


Рис.7

Выборочное среднее находим по формуле (1.4)

$$\overline{x_в} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 1}{15} = \frac{52}{15} \approx 3,5.$$

Выборочную дисперсию находим по формуле (1.5)

$$D_в = \frac{(1-3,5)^2\cdot 2 + (2-3,5)^2\cdot 3 + (3-3,5)^2\cdot 2 + (4-3,5)^2\cdot 3 +}{15}$$

$$+\frac{(5-3,5)^2\cdot 4 + (6-3,5)^2\cdot 1}{15} = \frac{35,75}{15} = 2,38.$$

Выборочное среднее квадратичное отклонение определяем по формуле (1.7)

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{2,38} = 1,54.$$

«Исправленную» выборочную дисперсию находим по формуле (2.1).

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_в = \frac{15}{14}\cdot 2,38 = 2,55.$$

«Исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение имеет вид

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2{,}55} = 1{,}59.$

Мода M_0^* - элемент выборки, которому соответствует наибольшая частота. В нашем случае (из таблицы 5) это $x = 5$. Поскольку данный вариационный ряд содержит нечетное число элементов, $n = 15$, то медиана M_e^* - средний элемент вариационного ряда.

В данном примере из вариационного ряда

1,1,2,2,2,3,3,4,4,4,5,5,5,5,6

медиана - это восьмой элемент: $M_e^* = x_8 = 4$.

6. Коэффициент вариации находим по формуле (1.7′)

$$\overline{V} = \frac{\sigma_в}{\overline{x}} \cdot 100\% = \frac{1{,}54}{3{,}5} \cdot 100\% = 44.$$

7. Начальный эмпирический момент второго порядка находим по формуле (1.8).

$$\overline{V_2} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot n_i}{n} = \frac{1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 1}{15} = \frac{213}{15} = 14{,}2.$$

8. Коэффициент асимметрии (скошенности) $\widetilde{A}$ определяем по формуле (1.10).

$$\widetilde{A} = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma_в^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^3 n_i}{n \cdot \sigma_в^3}$$, где $\overline{\mu}_3$ - центральный эмпирический момент 3-го порядка.

Отсюда получаем:

$$\tilde{A} = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma_в^3} = \frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x}_в)^3 n_i}{n \cdot \sigma_в^3} =$$

$$\frac{(1-3{,}5)^3 \cdot 2 + (2-3{,}5)^3 \cdot 3 + (3-3{,}5)^3 \cdot 2 + (4-3{,}5)^3 \cdot 3 +}{15 \cdot 1{,}54^3}$$

$$+ \frac{(5-3{,}5)^3 \cdot 4 + (6-3{,}5)^3 \cdot 1}{15 \cdot 1{,}54^3} = \frac{71{,}125}{15 \cdot 1{,}54^3} \approx 1{,}428.$$

9. Эксцесс статистического ряда находим по формуле (1.11).

$\overline{E} = \dfrac{\overline{\mu}_4}{\sigma_в^4} - 3 = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x}_в)^4 n_i}{n \cdot \sigma_в^4} - 3$, где $\overline{\mu}_4$ - центральный эмпирический момент 4-го порядка. Поэтому

$$\overline{E} = \frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x}_в)^4 \cdot n_i}{n \cdot \sigma_в^4} - 3 =$$

$$\frac{(1-3{,}5)^4 2 + (2-3{,}5)^4 3 + (3-3{,}5)^4 2 + (4-3{,}5)^4 3 + (5-3{,}5)^4 4 + (6-3{,}5)^4 1}{15 \cdot 1{,}54^4}$$

$$-3 = \frac{379{,}97}{15 \cdot 1{,}54^4} - 3 = 1.5\,.$$

Задание 2

По данной выборке (n=30) выполнить следующие задания:

1. Построить интервальный статистический ряд, осуществить группировку данных, количество интервалов найти по формуле Стерджеса.
2. Представить выборку графически, построить гистограмму и полигон частот.

3. Вычислить числовые характеристики: выборочное среднее $\overline{x_в}$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратичное отклонение $\sigma_в$, « исправленную» выборочную дисперсию S^2, «исправленное» среднее квадратическое отклонение S, моду M_0^*, медиану Me^* интервального ряда.

Примечание. Выборка составляется из двух вариантов: свой и следующий по счету.

Например: 1.1 и 1.2.

Образец выполнения задания №2.

1) Дана выборка
1, 3, 0, 4, 5, 1, 5, 6, 0, 4, 5, 6, 6, 5, 0, 2, 4, 5, 2, 7, 7, 2, 4, 5, 6, 7, 2, 7, 7, 7.
Проранжировав статистические данные, получим вариационный ряд.
0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7.
Здесь $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 8$, $R = x_{\max} - x_{\min} = 8\text{-}0=8$.
Используя формулу Стерджеса, находим длину частичного интервала

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 1{,}442 \cdot \ln(n)} = \frac{R}{m},$$ где m – число интервалов.

$$h = \frac{8}{1 + 1{,}442 \cdot \ln 30} = \frac{8}{1 + 4{,}9} \approx 1{,}4.$$

Примем h =1,4; m≈6.

За начало первого интервала возьмем значение

$$x_0 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 0 - \frac{1,4}{2} = -0,7.$$

Имеем интервалы: [- 0,7; 0,7), [0,7; 2,1), [2,1; 3,5), [3,5; 4,9), [4,9; 6,3), [6,3; 7,7).

Подсчитаем число элементов, попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд.

	[-0,7;0,7)	[0,7;2,1)	[2,1;3,5)	[3,5;4,9)	[4,9;6,3)	[6,3;7,7)
Частота n_i	3	6	5	4	9	6
$P_i^* = \frac{n_i}{n}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{6}{30}$

2) Графическим изображением интервального вариационного ряда служит гистограмма, состоящая из прямоугольников (рис.8). Основанием служат частичные интервалы длины $h = 1,4$, а высоты равны $\frac{h_i}{h}$:

$$\frac{3}{1,4} = 2,14; \quad \frac{6}{1,4} = 4,28; \quad \frac{1}{1,4} = 0,71; \quad \frac{4}{1,4} = 2,85; \quad \frac{9}{1,4} = 6,42; \quad \frac{6}{1,4} = 4,28.$$

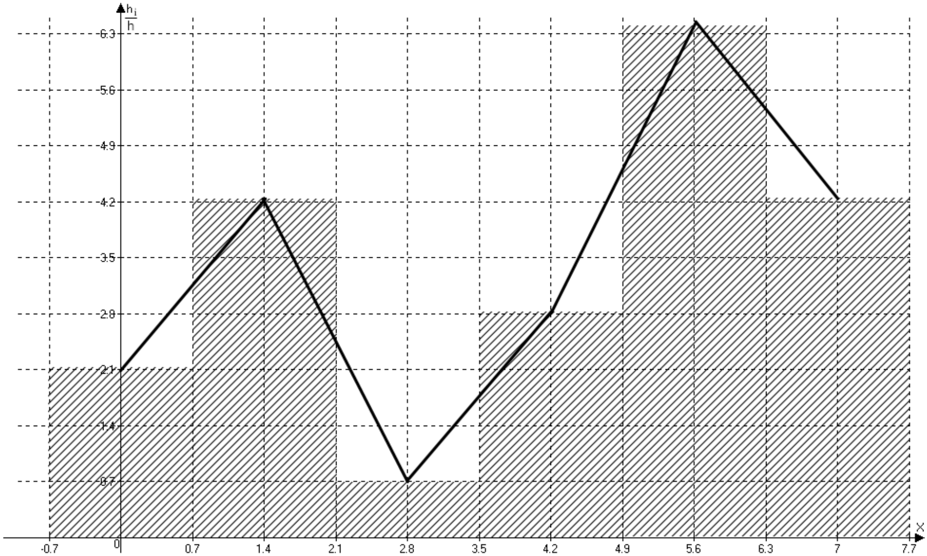


Рис.8

Чтобы получить полигон частот, надо соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой.

3) В случае интервального статистического ряда в формуле (1.4) в качестве x_i берут середины интервалов, n_i - соответствующие им частоты, поэтому составим таблицу для нахождения данных задания 2.

Имеем:

Середина интервалов x_i	0	1,4	2,8	4,2	5,6	7
Частота n_i	3	6	1	4	9	6

Вычислим выборочное среднее $\overline{x_в} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{0 \cdot 3 + 1{,}4 \cdot 6 + 2{,}8 \cdot 1 + 4{,}2 \cdot 4 + 5{,}6 \cdot 9 + 7 \cdot 6}{30} = \frac{120{,}4}{30} \approx 4.$$

Выборочную дисперсию $D_в$ находим по формуле (1.5):

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x}_в)^2 \cdot n_i}{n} =$$

$$\frac{(0-4)^2 3 + (1{,}4-4)^2 6 + (2{,}8-4)^2 1 + (4{,}2-4)^2 4 + (5{,}6-4)^2 9 + (7-4)^2 6}{30}$$

$$= \frac{167{,}08}{30} \approx 5{,}57.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{5{,}57} \approx 2{,}36.$$

«Исправленная» выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в = \frac{30}{29} \cdot 5{,}57 \approx 5{,}76.$$

Мода интервального статистического ряда вычисляется по формуле (1.2):

$$M_0 = x_{ниж} + h \cdot \left(\frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 + n_3}\right).$$

Имеем $x_{ниж}$ =4,9 – нижняя граница интервала с наибольшей частотой n_2=9; n_1=4 - частота интервала, предшествующего модальному;

n_3=6 – частота интервала, следующего за модальным; h = 1,4.

$$M_0 = 4{,}9 + 1{,}4 \cdot \left(\frac{9-4}{2\cdot 9 - 4 + 6}\right) = 5{,}25.$$

Медиана интервального статистического ряда вычисляется по формуле

$$M_e^* = x_i + h \cdot \frac{\frac{h}{2} - (h_1 + h_2 + \ldots + h_{i-1})}{h_i}.$$

$x_i = 4{,}9$ – начало медианного интервала, т.е. интервала, в котором содержится серединный элемент.

$h = 1{,}4$; $n = 30$ – объем выборки;
$n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} = 3+6+1+4 = 14$ – сумма частот интервалов, предшествующих медианному;
$n_i = 9$ – частота медианного интервала.

$$M_e^* = 4{,}9 + 1{,}4 \cdot \frac{\frac{30}{2} - (3+6+1+4)}{9} = 5{,}05.$$

3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПИСАТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИКИ В СРЕДЕ MATHCAD

Без использования компьютеров невозможно изучить математическую статистику, поскольку решение задач требует многих громоздких вычислений, графических построений, статистического моделирования.

В данном разделе мы рассмотрим некоторые работы в Mathcad. Рассмотрите внимательно окно программы. Здесь вы увидите, что интерфейс аналогичен интерфейсу большинства Windows-приложений. Поэтому остановимся только на тех аспектах, которые являются новыми и необходимы для статистических расчетов.

Задание 3

По данной выборке (Задание 1) провести первоначальную статистическую обработку данных в среде MATHCAD.

Образец выполнения задания №3.

Дана выборка: 1,1,2,2,2,3,3,4,4,4,5,5,5,5,6. Требуется найти:

1) выборочное среднее $\overline{x_в}$;
2) выборочную дисперсию $D_в$;
3) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;
4) «исправленную» дисперсию S^2;
5) исправленное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2}$;
6) размах $R = x_{\max} - x_{\min}$;
7) моду M_0^*;
8) медиану M_e^*;

9) асимметрию $\tilde{A}$;

10)эксцесс $\overline{E}$;

11)построить полигон относительных частот.

► Найдем *выборочное среднее* $\overline{x_в}$. Для этого:

1. Установите курсор в виде красного крестика в начало документа.

2. В режиме английского алфавита нажмите последовательно клавиши `x` `⇧Shift`+`:`. При этом на экране появится запись **x:=**.

3. На панели «Матрица» щелкните по кнопке, при этом на экране появится диалоговое окошко «Вставить матрицу» (рис.9). Укажите, какую матрицу Вы хотите вставить (строк – 1, колонок – 10) и щелкните по кнопке Вставить.

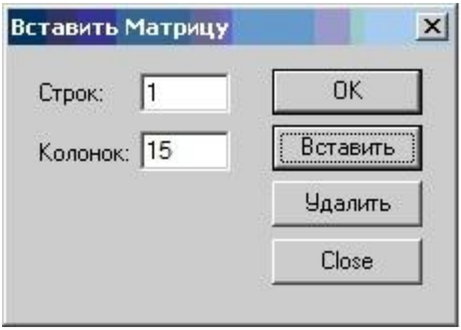


Рис. 9

При этом на экране появится шаблон для ввода исходных данных: x := (▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮ ▮) в который введите значения выборки.

4. Для подсчета выборочного среднего в MathCad используется функция **mean(x)**, после ввода которой необходимо нажать знак

«=» для того, чтобы получить результат. Таким образом, лист вычислений у вас примет вид (рис. 10):

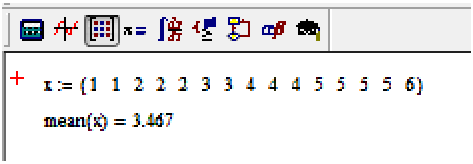


Рис.10

По аналогии вычисляются остальные характеристики (таб. 7).

Таблица 7

№	Характеристика	Вычисление в MathCad
1.	выборочная дисперсия $D_в$	var(x) = 2.382
2.	выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$	stdev(x) = 1.543
3.	исправленная дисперсия S^2	Var(x) = 2.552
4.	исправленное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2}$	Stdev(x) = 1.598
5.	размах $R = x_{max} - x_{min}$	R := max(x) − min(x) R = 5
6.	мода Mo	mode(x) = 5
7.	медиана Me	median(x) = 4
8.	асимметрия $\tilde{A}$	skew(x) = −0.173
9.	эксцесс $\bar{E}$	kurt(x) = −1.213

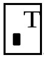
Построим *полигон относительных частот*.

1. Различными в заданной выборке являются элементы $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, т.е. число сегментов равно шести. Зададим число сегментов гистограммы: $n := 6$

2. Статистический ряд распределения задаем как функцию histogram(n,x). Результатом работы этой функции является матрица размерности $n \times 2$, в первом столбце которой содержатся значения середин сегментов разбиения, во втором – число элементов выборки, попавших в каждый из интервалов.

$$H^T = \begin{pmatrix} 1.417 & 2.25 & 3.083 & 3.917 & 4.75 & 5.583 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H := \text{histogram}(n, x)$$

3. Выведем полученную матрицу на экран в транспонированном виде. Для этого на панели *векторов и матриц* щелкните по кнопке , при этом на экране появится шаблон , после заполнения которого нажмите знак «=». Результатом выполнения будет матрица:

4. Вычислим относительные частоты $f_i = \dfrac{n_i}{n}$, для этого:

1) используя кнопки  и  задайте цикл:

$$i := 0..\,\text{last}\left(H^{\langle 1 \rangle}\right)$$

2) определите функцию вычисления относительных частот по формуле:

$$f_i := \frac{\left(H^{\langle 1 \rangle}\right)_i}{\sum_{i=0}^{\mathrm{last}\left(H^{\langle 1 \rangle}\right)} \left(H^{\langle 1 \rangle}\right)_i}$$

3) вычислите транспонированный вектор частот:

5. Определите шаг:

$$h := \frac{\max\left(H^{\langle 0 \rangle}\right) - \min\left(H^{\langle 0 \rangle}\right)}{n - 1}$$

$$h = 0.833$$

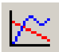
6. Рассчитайте плотности относительных частот:

$$f^T = (0.133\ \ 0.2\ \ 0.133\ \ 0.2\ \ 0.267\ \ 0.067)$$

$$w_i := \frac{f_i}{h}$$

7. Построим полигон, для этого:

1) откройте панель «Графики»;

2) щелкните по кнопке , при этом появится окно отображения графиков (рис.11):

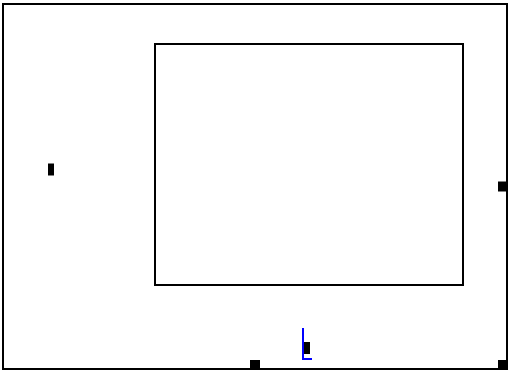


Рис.11

3) в маркере, расположенном под внутренней рамкой, задайте имя переменной $H^{\langle 0\rangle}$;

4) в маркер, расположенный слева от внутренней рамки введите имя функции: w. На экране появится полигон частот (рис. 12):

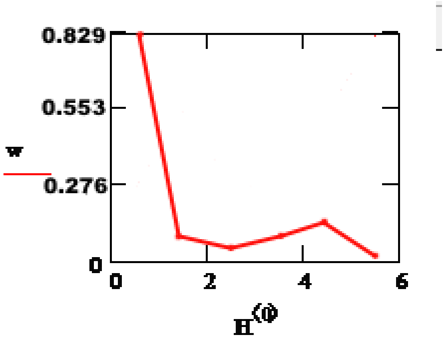


Рис. 12 ◄

Ниже представлена программа решения задачи 3.

$x := (1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 6)$

$\text{mean}(x) = 3.467$

$\text{var}(x) = 2.382$

$\text{stdev}(x) = 1.543$

$\text{var}(x) = 2.382$

$\text{Stdev}(x) = 1.598$

$R := \max(x) - \min(x)$

$R = 5$

$\text{mode}(x) = 5$

$\text{median}(x) = 4$

$\text{skew}(x) = -0.173$

$\text{kurt}(x) = -1.213$

$n := 6$

$$\text{histogram}(n, x) = \begin{pmatrix} 1.417 & 2 \\ 2.25 & 3 \\ 3.083 & 2 \\ 3.917 & 3 \\ 4.75 & 4 \\ 5.583 & 1 \end{pmatrix}$$

$H := \text{histogram}(n, x)$

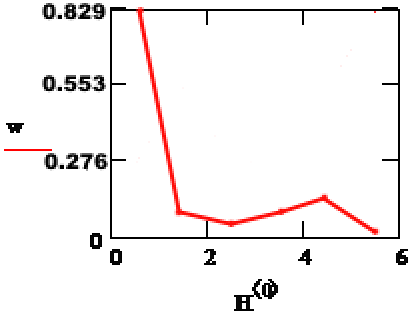
$$f_i := \frac{\left|H^{\langle 1\rangle}\right|_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{last}\left(H^{\langle 1\rangle}\right)} \left|H^{\langle 1\rangle}\right|_i}$$

$$f^T = (0.133\ \ 0.2\ \ 0.133\ \ 0.2\ \ 0.267\ \ 0.067)$$

$$h := \frac{\max\left(H^{\langle 0\rangle}\right) - \min\left(H^{\langle 0\rangle}\right)}{n-1}$$

$$h = 0.833$$

$$w_i := \frac{f_i}{h}$$



$$w = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.24 \\ 0.16 \\ 0.24 \\ 0.32 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называют случайной выборкой, объемом выборки, элементом выборки?
2. Что называют генеральной совокупностью?
3. Какие повторные наблюдения называются независимыми?
4. Что называется вариационным рядом случайной выборки? Что называется статистическим рядом?
5. Что такое эмпирическая функция распределения?
6. Что называется интервальным вариационным рядом?
7. Что такое полигон, гистограмма?
8. Что называют выборочным средним, выборочной дисперсией, медианой?
9. Что называют точечной оценкой неизвестного параметра генеральной совокупности?
10. Какую точечную оценку называют несмещенной?
11. Какую точечную оценку называют состоятельной?
12. Какая точечная оценка является несмещенной для математического ожидания генеральной совокупности?
13. Какая точечная оценка для дисперсии генеральной совокупности является смещенной? Несмещенной?
14. В чем состоит метод моментов нахождения точечных оценок?
15. Что называют интервальной оценкой для неизвестного параметра распределения генеральной совокупности?
16. Что такое доверительная вероятность, нижняя и верхняя границы интервальной оценки неизвестного параметра?
17. Как определяется доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения?
18. Какую статистику используют для построения интервальной оценки для дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности?
19. Какую статистику используют при построении интервальной оценки параметра биномиального распределения.

◄

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Для данных выборок определить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию $D_в$, «исправленную» выборочную дисперсию S^2, моду Mo, медиану Me, размах R. Для **а)** составить вариационный и статистический ряды; для **б)** найти эмпирическую функцию распределения; для **в)** построить гистограмму и полигон, эмпирическую функцию распределения $F_n^*(x)$.

1.1. **а)** 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

б)

x_i	11	13	15	17	19	21	23
n_i	2	4	8	12	16	10	3

в)

x_i	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24)
n_i	1	1	3	2	1	1

1.2. **а)** 6, 1, 4, 8, 5, 7, 2, 5, 7, 6.

б)

x_i	12	14	16	18	20	22	23
n_i	3	5	9	10	8	7	4

в)

x_i	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
n_i	4	1	2	3	3	1

1.3. **а)** 4, 9, 5, 2, 6, 9, 3, 3, 4, 9.

б)

x_i	10	12	14	16	18	20	22
n_i	6	4	1	5	7	8	10

в)

x_i	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)
n_i	2	3	1	1	2

1.4. **а)** 3, 7, 6, 4, 7, 1, 4, 2, 1, 2.

б)

x_i	9	11	13	15	17	19	21
n_i	9	5	4	7	8	10	6

в)

x_i	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
n_i	1	3	4	2	1

1.5. а) 2, 5, 7, 6, 8, 3, 1, 5, 7, 5.

б)

x_i	8	10	12	14	16	18	20
n_i	2	5	4	6	10	6	7

в)

x_i	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)
n_i	2	4	1	3	4

1.6. а) 1, 3, 8, 8, 9, 5, 2, 3, 4, 8.

б)

x_i	7	10	13	16	19	22	23
n_i	6	1	7	10	6	4	2

в)

x_i	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)
n_i	2	4	4	1	3

1.7. а) 7, 1, 9, 2, 8, 7, 3, 2, 1, 1.

б)

x_i	6	9	12	15	18	21	22
n_i	6	8	10	4	5	7	9

в)

x_i	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)	[30; 36)
n_i	3	4	2	4	1	3

1.8. а) 6, 8, 1, 4, 7, 9, 4, 6, 7, 4.

б)

x_i	5	8	11	14	17	20	21
n_i	1	8	10	3	4	1	9

в)

x_i	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
n_i	2	2	1	3	3	1

1.9. **а)** 5, 6, 2, 6, 6, 1, 1, 4, 4, 7.

б)

x_i	4	7	10	13	16	19	20
n_i	3	10	8	1	6	4	6

в)

x_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
n_i	4	4	1	3	3	2

1.10. **а)** 4, 4, 3, 8, 5, 3, 2, 2, 1, 1.

б)

x_i	3	7	11	15	19	22	23
n_i	10	8	1	2	7	9	1

в)

x_i	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24)
n_i	2	3	3	4	2	1

1.11. **а)** 3, 2, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 3.

б)

x_i	1	5	9	13	17	21	22
n_i	6	4	5	8	2	4	4

в)

x_i	[0; 7)	[7; 14)	[14; 21)	[21; 28)
n_i	3	1	1	2

1.12. **а)** 2, 9, 5, 4, 3, 7, 4, 4, 4, 6.

б)

x_i	11	13	15	17	19	21	22
n_i	6	1	5	7	9	10	4

в)

x_i	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
n_i	2	4	3	2	2	1

1.13. **а)** 1, 7, 6, 6, 2, 9, 1, 2, 1, 9.

б)

x_i	12	14	16	18	20	22	23
n_i	6	1	8	4	10	8	7

в)

x_i	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[20; 24)	[24; 30)
n_i	2	1	3	2	1	1

1.14. **а)** 7, 5, 7, 8, 1, 1, 2, 5, 7, 2.

б)

x_i	13	15	17	19	21	23	24
n_i	10	8	4	1	6	4	7

в)

x_i	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24)
n_i	1	2	3	3	2	1

1.15. а) 6, 3, 8, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5.

б)

x_i	10	12	14	16	18	20	21
n_i	5	1	4	9	7	3	10

в)

x_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
n_i	4	1	3	2	4	1

1.16. а) 5, 1, 9, 4, 3, 5, 4, 2, 1, 8.

б)

x_i	9	11	13	15	17	19	20
n_i	8	4	5	6	10	6	8

в)

x_i	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
n_i	2	1	3	2	4

1.17. а) 4, 8, 1, 6, 4, 7, 1, 5, 7, 1.

б)

x_i	8	10	12	14	16	18	19
n_i	8	1	2	5	7	2	1

в)

x_i	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)
n_i	1	4	3	2	4

1.18. а) 3, 6, 2, 8, 5, 9, 2, 3, 4, 4.

б)

x_i	7	9	11	13	15	17	20
n_i	8	1	5	2	7	8	5

в)

x_i	[0; 7)	[7; 14)	[14; 21)	[21; 28)	[28; 35)
n_i	1	3	1	1	2

1.19. а) 2, 4, 3, 2, 6, 1, 3, 2, 1, 7.

б)

x_i	6	8	10	12	14	16	19
n_i	4	9	2	5	1	7	10

в)

x_i	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)
n_i	2	4	3	1

1.20. а) 1, 2, 4, 4, 7, 3, 4, 6, 7, 3.

б)

x_i	5	7	9	11	13	15	18
n_i	10	6	1	7	8	91	2

в)

x_i	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)
n_i	2	3	4	2

1.21. а) 7, 9, 5, 6, 8, 5, 1, 4, 4, 6.

б)

x_i	4	6	8	10	12	14	19
n_i	9	5	1	7	8	6	4

в)

x_i	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
n_i	1	1	3	2	2	4

1.22. а) 6, 7, 6, 8, 4, 7, 1, 2, 1, 9.

б)

x_i	3	6	9	12	15	18	20
n_i	8	4	8	1	7	8	9

в)

x_i	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	[20; 24)
n_i	4	1	3	4	2	2

1.23. а) 5, 5, 7, 2, 4, 9, 2, 6, 7, 2.

б)

x_i	2	5	8	11	14	17	22
n_i	9	4	7	10	9	10	2

в)

x_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
n_i	3	4	4	2	1	3

1.24. а) 4, 3, 8, 4, 4, 1, 3, 4, 4, 5.

б)

x_i	1	5	9	13	17	21	22
n_i	1	8	6	4	5	1	7

в)

x_i	[0; 7)	[7; 14)	[14; 21)	[21; 28)
n_i	1	4	3	2

1.25. а) 2, 1, 9, 6, 4, 3, 4, 2, 1, 8.

б)

x_i	9	10	11	12	13	14	15
n_i	4	10	8	1	3	4	9

в)

x_i	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)
n_i	2	1	3	2	1

1.26. а) 7, 8, 6, 5, 9, 4, 2, 3, 5, 5.

б)

x_i	4	7	10	13	16	19	22
n_i	8	6	1	9	6	8	2

в)

x_i	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
n_i	2	2	4	3	2	1

1.27. а) 5, 9, 5, 9, 3, 8, 1, 3, 1, 8.

б)

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	7	5	7	2	6	9	8

в)

x_i	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)
n_i	4	2	3	1	3	2	2

1.28. а) 6, 4, 8, 1, 5, 8, 3, 5, 8, 1.

б)

x_i	2	6	10	14	18	22	26
n_i	8	5	6	10	8	10	1

в)

x_i	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
n_i	3	2	4	1	2	3

1.29. а) 5, 2, 9, 3, 5, 1, 4, 3, 5, 4.

б)

x_i	1	6	11	16	21	26	31
n_i	2	7	7	3	6	1	8

в)

x_i	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30)	[30; 36)
n_i	4	2	1	3	1	2

1.30. а) 2, 4, 7, 8, 2, 5, 2, 4, 1, 6.

б)

x_i	7	8	9	10	11	12	13
n_i	5	9	7	2	1	5	8

в)

x_i	[0; 7)	[7; 14)	[14; 21)	[21; 28)	[28; 35)
n_i	3	1	2	3	1

Задание 2

2.1. Известно, что случайная величина X имеет распределение Пуассона $P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, неизвестным является параметр λ. Методом моментов найти точечную оценку неизвестного параметра λ по выборке $(x_1, x_2, ..., x_8)$ (см. таблицу 8).

Таблица 8

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	n
1	52	48	49	49	52	50	47	48	65
2	117	131	128	118	125	135	123	119	150
3	32	37	33	35	27	36	35	34	50
4	101	98	113	117	98	93	105	103	140
5	27	34	26	33	33	36	28	30	50
6	81	97	75	79	85	81	78	73	100
7	19	13	10	11	20	22	15	14	30
8	73	75	69	74	73	77	68	70	110
9	43	39	41	45	36	42	41	37	70
10	5	12	8	15	4	3	7	6	25
11	25	41	36	34	31	40	15	22	60
12	40	31	65	56	71	54	36	47	100
13	36	70	63	58	93	81	25	38	110
14	18	16	23	14	11	15	27	10	40
15	35	28	16	45	22	14	39	27	60
16	25	35	39	41	32	34	28	27	50
17	67	73	85	63	56	94	55	66	130
18	35	41	30	36	38	42	35	32	80
19	167	152	155	161	166	157	158	162	300
20	25	34	12	36	18	33	16	17	50
21	18	37	45	33	27	36	19	40	70

Продолжение таблицы 8

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	n
22	98	79	83	85	91	81	86	84	100
23	45	78	83	66	62	71	73	50	90
24	14	13	17	15	20	25	13	22	45
25	35	53	43	35	34	44	37	30	60
26	35	45	74	77	85	86	89	62	150
27	11	15	17	20	15	13	17	11	30
28	33	12	15	17	25	20	28	17	40
29	21	11	28	12	13	15	22	19	50
30	83	94	74	77	85	89	80	81	100

2.2. Известно, что случайная величина X имеет биномиальное распределение $P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, неизвестным является параметр p. Методом моментов найти точечную оценку неизвестного параметра p (см. таблицу 8).

2.3. Найти методом моментов по выборке (см. таблицу 9) точечные оценки неизвестных параметров m и σ нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

Таблица 9

Вариант	Распределение					Вариант	Распределение				
1	x_i	–6	–2	3	6	**2**	x_i	–10	–5	–1	5
	n_i	12	14	16	8		n_i	25	44	16	15
3	x_i	4	8	16	24	**4**	x_i	430	450	500	
	n_i	31	14	28	27		n_i	20	18	12	
5	x_i	0,01	0,04	0,08	0,14	**6**	x_i	2	6	8	9
	n_i	19	28	31	22		n_i	20	13	12	5

Продолжение таблицы 9

Вариант	Распределение					Вариант	Распределение				
7	x_i	10	14	16	22	**8**	x_i	3	6	8	14
	n_i	13	24	14	9		n_i	8	14	10	18
9	x_i	0,2	0,3	0,5	0,6	**10**	x_i	3150	3170	3200	
	n_i	16	11	10	13		n_i	14	6	20	
11	x_i	–4	–1	2	8	**12**	x_i	47	50	52	56
	n_i	16	8	14	12		n_i	24	16	23	17
13	x_i	–6	–2	2	5	**14**	x_i	14	15	18	20
	n_i	11	13	14	12		n_i	15	12	11	12
15	x_i	381	385	389		**16**	x_i	–3	1	4	8
	n_i	54	22	24			n_i	2	3	1	4
17	x_i	16	20	22	30	**18**	x_i	38	42	46	
	n_i	14	26	17	3		n_i	52	36	12	
19	x_i	15	26	31		**20**	x_i	4	8	10	14
	n_i	426	318	256			n_i	12	24	38	26
21	x_i	30	32	37		**22**	x_i	0,1	0,3	0,5	
	n_i	41	28	31			n_i	16	21	13	
23	x_i	0,02	0,05	0,08		**24**	x_i	10	16	26	
	n_i	32	29	39			n_i	14	18	18	
25	x_i	–3	–1	5	7	**26**	x_i	6	9	11	14
	n_i	15	11	25	19		n_i	21	32	23	24
27	x_i	246	250	257		**28**	x_i	421	428	432	
	n_i	24	12	14			n_i	32	44	24	
29	x_i	15	18	23	24	**30**	x_i	44	48	52	
	n_i	13	5	14	8		n_i	29	46	25	

2.4. Случайная величина X распределена равномерно (см. таблицу 9), плотность ее

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a), & x\in(a,b); \\ 0, & x\notin(a,b) \end{cases} \qquad (b>a).$$

Оценить неизвестные параметры a и b по результатам наблюдаемых значений.

Задание 3

Найти доверительный интервал для оценки с надежностью γ неизвестного математического ожидания m нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение равно σ**,** выборочная средняя $\bar{x}_в$ и объем выборки представлен в таблице 10.

Таблица 10

Вариант	γ	$\bar{x}_в$	σ	n	**Вариант**	γ	$\bar{x}_в$	σ	n
1	0,95	75,1	12	144	**16**	0,95	30,2	6	26
2	0,95	14	5	25	**17**	0,99	100	12	30
3	0,99	10,2	4	16	**18**	0,99	56	8	32
4	0,95	2000	40	5	**19**	0,95	30,01	4	100
5	0,95	1000	40	100	**20**	0,95	25,2	5	30
6	0,99	16,8	5	35	**21**	0,99	18,4	2	42
7	0,95	75,1	13	169	**22**	0,95	120	20	100
8	0,99	12,2	2	20	**23**	0,99	14,02	6	20
9	0,95	102	10	50	**24**	0,95	35,01	5	15
10	0,95	75,09	14	150	**25**	0,95	26	4	30
11	0,99	16,4	4	22	**26**	0,99	26	6	40
12	0,99	14,2	2	18	**27**	0,95	16	2	22
13	0,95	35,2	4	30	**28**	0,99	25,02	4	32
14	0,99	60,4	10	20	**29**	0,95	18,01	3	30
15	0,95	75,08	15	22	**30**	0,99	26	2	24

З а д а н и е 4

Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью γ точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна δ, если известно среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной совокупности.

Таблица 11

Вариант	γ	δ	σ	**Вариант**	γ	δ	σ
1	0,95	0,3	4,2	**16**	0,975	0,4	2,3
2	0,95	0,4	1,2	**17**	0,95	0,2	1,5
3	0,975	0,2	2,1	**18**	0,975	0,7	3,3
4	0,975	0,5	5,5	**19**	0,95	0,1	5,4
5	0,95	0,6	3,1	**20**	0,975	0,3	7,3
6	0,975	0,1	4,1	**21**	0,95	0,5	4,3
7	0,95	0,4	7,2	**22**	0,975	0,6	5,3
8	0,975	0,3	6,3	**23**	0,95	0,1	2,4
9	0,95	0,7	1,3	**24**	0,975	0,4	6,4
10	0,975	0,2	3,2	**25**	0,95	0,5	4,4
11	0,95	0,7	7,1	**26**	0,975	0,6	1,6
12	0,975	0,1	5,1	**27**	0,95	0,1	8,2
13	0,95	0,2	2,2	**28**	0,975	0,2	2,5
14	0,975	0,7	1,4	**29**	0,95	0,4	2,6
15	0,95	0,3	8,4	**30**	0,975	0,3	3,4

Задание 5

5.1. Для определения среднего возраста учащихся возраста учащихся одного учебного заведения методом случайной повторной выработки обследовано 200 чел, в результате чего установлено, что средний возраст учащихся составляет 19 лет.

Полагая дисперсию равной 6,25 и считая распределение возраста учащихся нормальным, определить с надежностью 0,99 возможные пределы среднего возраста учащихся.

5.2. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

x_i	3	5	7	8	10	12	14
n_i	3	7	4	6	7	5	8

Найти с надежностью 0,97 доверительный интервал для оценки математического ожидания и с надежностью 0,95 – для оценки среднего квадратичного отклонения.

5.3. Предполагая, что распределение генеральных совокупностей является нормальным, найти 90 %-ные доверительные интервалы для математического ожидания (среднего) и дисперсию ёмкости конденсатора, если $n = 16$, $\bar{x} = 20$ мкФ, $S^2 = 16$ мкФ.

5.4. Для стада из 100 голов методом случайной повторной выборки установлен средний годовой привес скота – 200 кг. Определить с надежностью 0,85 возможные пределы годового привеса скота, считая, что годовой привес распределен по нормальному закону, а среднее квадратичное отклонение равно 50 кг.

5.5. Результаты 10 измерений емкости конденсатора дали следующие отклонения от номинального значения (пкФ): 5,4; -13,9; -11,0; 7,2; -15,6; 29,2; 1,4; -0,3; 6,6; -9,9. Найти 90 %-ный доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратичного отклонения, предполагая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение.

5.6. Получены следующие данные о годовом товарообороте (в млн. руб.) 100 случайно отобранных продовольственных магазинов города:

J_i	$[100; 120)$	$[120; 140)$	$[140; 160)$	$[160; 180)$	$[180; 200]$
n_i	17	40	32	8	3

Найти 95 %-ный доверительный интервал для среднего товарооборота продовольственного магазина в городе.

5.7. Методом случайной повторной выборки проведено обследование 900 рабочих одного предприятия, в результате чего установлена средняя месячная выработка одного рабочего – 400 деталей. Найти с надежностью 0,95 границы, в которых находится средняя месячная выработка одного рабочего в генеральной совокупности, считая распределение месячной выработки одного рабочего нормальным со средним квадратическим отклонением 45 деталей.

5.8. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	2	5	4	6	3

Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки математического ожидания и с надежностью 0,99 – для оценки среднего квадратичного отклонения.

5.9. Для установления среднего размера вклада определенной категории вкладчиков в сберегательных кассах города необходимо провести случайную повторную выборку лицевых счетов. Считая распределение размера вклада нормальным со средним квадратическим отклонением 150 руб., найти доверительный интервал для оценки среднего размера вклада с надежностью $\gamma = 0{,}9$. Известно $\bar{x} = 1000$.

5.10. Методом случайной повторной выборки было взято для проверки на вес 200 деталей. В результате проверки установлено, что распределение веса деталей можно считать нормальными со средним квадратическим отклонением 4 г; средний вес деталей 30 г. С надежностью 0,9544 требуется определить интервал, в котором находится средний вес деталей в генеральной совокупности.

5.11. Предполагая, что распределение генеральных совокупностей является нормальным, найти 90 %-ные доверительные интервалы для математического ожидания (среднего) и дисперсии времени безотказной работы электролампы, если $n = 25$, $\bar{x} = 500$ ч, $S^2 = 100$ ч.

5.12. Станок-автомат штампует валики. Методом случайной повторной выборки установили средний размер диаметра валиков. В выборке из 100 валиков он оказался равным 25 мм. Найти с вероятностью 0,95 возможные пределы размера диаметра валика, считая распределение диаметра валика нормальным, а а среднее квадратическое отклонение равным 2 мм.

5.13. В порядке случайной повторной выборки проведено обследование 10000 пассажиров пригородных поездов, в результате которого установлена средняя дальность поездки пассажиров – 24,2 км. Определить с надежностью 0,6827 возможные пределы средней дальности поездки пассажиров, считая распределение дальности поездки пассажиров нормальным со средним квадратическим отклонением 12 км.

5.14. Для определения среднего веса яблока производят случайную повторную выборку. В выборке из 100 яблок оказалось, что средний вес яблок 1000 г. Распределение веса яблок можно считать нормальным, а среднее квадратическое отклонение равно 24. С надежностью 0,95 требуется определить интервал, в котором находится средний вес яблок в генеральной совокупности.

5.15. В порядке случайной повторной выборки произведено обследование производительности на земляных работах у 150 рабочих, в результате которого средняя выработка определена в 5,5 м^3 на одного рабочего. Найти с надежностью 0,99 возможные пределы производительности труда рабочих в генеральной совокупности, считая распределение выработки нормальным со средним квадратическим отклонением 1,5 м^3.

5.16. Дана выборка объемом $n = 10$:

-0,383	-1,007	-0,414	0,638	-0,186
0,507	-1,414	-0,400	0,883	-0,400

Предполагается, что генеральная совокупность, из которой взята данная выборка, распределена по нормальному закону. Найти доверительные интервалы для среднего и дисперсии, если доверительная вероятность $\gamma = 0{,}95$.

5.17. Из большой партии диодов были взяты две выборки с интервалом в один месяц. Результаты измерения времени восстановления у диодов первой выборки (нс): 51, 62, 53, 52, 63. Выборочное среднее и дисперсия времени восстановления для 7 диодов второй выборки: $\bar{x} = 60$, $D_в = 36{,}06$. Найти: **а)** 95%-ный доверительный интервал для среднего первой выборки; **б)** 99%-ный интервал для изменения среднего в течение месяца в предположении, что дисперсия времени восстановления диодов за этот период времени не изменилась.

5.18. Высота самолета определяется с помощью высотомера, средняя квадратичная ошибка которого $\sigma = 15$ м. Считая, что ошибки измерения высоты самолета распределены по нормальному закону, определить, сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с вероятностью $\gamma = 0{,}99$ предельная ошибка измерения средней высоты самолета была не более 30 м.

5.19. Для отрасли, включающей 1200 фирм, составлена случайная выборка из 19 фирм. По выборке оказалось, что в фирме в среднем работают 77,5 человека при среднем квадратичном отклонении $\sigma = 25$ человек. Пользуясь 95%-ным доверительным интервалом, оцените среднее число работающих в фирме по всей отрасли и общее число работающих в отрасли. Предполагается, что количество работников фирмы имеет нормальное распределение.

5.20. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице

x_i	2	4	6	8
n_i	1	3	2	2

Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки математического ожидания и с надежностью 0,99 – для оценки среднего квадратичного отклонения.

5.21. Предполагая, что распределение генеральных совокупностей является нормальным, найти 90 %-ные доверительные интервалы для математического ожидания (среднего) и дисперсию диаметра вала, если $n = 9$, $\bar{x} = 30$ мм, $S^2 = 9$ мм^2.

5.22. Из 200 работников банка случайным образом отобрано 20 человек, средняя зарплата которых составила 600 у.е., а среднее квадратичное отклонение 100 у.е. Предположив, что зарплата распределена по нормальному закону, определите с 95%-ной надежностью среднюю зарплату в банке и суммарные затраты банка на зарплату в месяц.

5.23. Методом случайной повторной выборки обследуется средняя продолжительность телефонного разговора, которая имеет нормальный закон распределения. Определить, сколько телефонных разговоров должно быть зафиксировано, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что отклонение выборочной средней от генеральной средней не превосходит 10 с при среднем квадратическом отклонении 2 млн.

5.24. Дана выборка объемом $n = 14$:

5	6	8	9	12	14	15
18	21	23	24	27	29	30

Предполагается, что генеральная совокупность, из которой взята данная выборка, распределена по нормальному закону. Найти доверительные интервалы для среднего и дисперсии, если доверительная вероятность $\gamma = 0,95$.

5.25. Измерения твердости 16 образцов легированной стали (в условных единицах) дали следующие результаты: 13,1; 12,8; 11,9; 12,4; 13,5; 13,7; 12,0; 13,8; 10,6; 12,4; 13,5; 11,7; 13,9; 11,5; 12,5; 11,9. В предположении, что выборка измерении получена из нормально распределенной генеральной совокупности, найти 95 %-ные доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

5.26. Оценка величины сопротивления для большой партии однотипных резисторов, определенная по результатам измерений 10 случайно отобранных экземпляров, равна $\bar{x} = 10$ кОм. Считая, что среднее квадратичное отклонение измерения известно:

$\sigma = 1$ кОм, найти доверительный интервал для оценки того, что для резисторов всей партии величина сопротивления лежит в пределах 100 ± 0,1 кОм. Сколько измерений нужно произвести, чтобы с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ утверждать, что для всей партии резисторов величина сопротивления лежит в пределах 10 ± 0,1 кОм?

5.27. В порядке случайной повторной выработки обследовано 800 коров, имеющихся в личном владении колхозников, и установлено, что у этой группы коров средний годовой удой равен 3000 кг. Определить с надежностью 0,9 возможные пределы удоя всех коров, считая, что распределение годового удоя нормальное со средним квадратичным отклонением 250 кг?

5.28. В порядке случайной повторной выборки проведено обследование 400 рабочих некоторого предприятия, в результате чего установлено, что средняя заработная плата рабочих составляет 7000 руб. Определить с надежностью 0,9544 возможные пределы заработной платы рабочих, считая распределение заработной платы рабочих нормальным со средними квадратичным отклонением 180 руб.

5.29. Измерения диаметров (в см) случайно отобранных из большой партии 250 валов дали следующие результаты:

J_i	$[7{,}8; 8{,}0)$	$[8{,}0; 8{,}2)$	$[8{,}2; 8{,}4)$	$[8{,}4; 8{,}6)$	$[8{,}6; 8{,}8)$	$[8{,}8; 9{,}0]$
n_i	5	20	80	95	40	10

Найти 95 %-ный доверительный интервал для среднего диаметра вала во всей партии.

5.30.Производится методом случайной повторной выборки обследование возраста читателей одной библиотеки. Сколько карточек необходимо взять для обследования, чтобы с вероятностью 0,99 можно было бы утверждать, что выборочная средняя отклоняется от генеральной средней не более чем на год? Среднее квадратичное отклонение принять равным 5 годам. Считать распределение возраста читателей нормальным.

Задание 6

Производят независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью *p* появления события *A* в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности *p* с надежностью γ_1, если в *n* испытаниях событие *A* появилось *m* раз. Какой минимальный объем выборки следует взять для того, чтобы с вероятностью γ_2 можно было утверждать, что доля наступления события *A* во всех испытаниях отличается от частоты появления события *A* в выборке не более чем на *k* %? (см. таблицу 12)

Таблица 12

№	*n*	*m*	γ_1	γ_2	*k*	№	*n*	*m*	γ_1	γ_2	*k*
1	200	100	0,95	0,9	1	16	410	300	0,95	0,9	4
2	100	60	0,99	0,95	2	17	140	100	0,99	0,95	1
3	400	210	0,9	0,99	3	18	270	210	0,9	0,99	2
4	350	120	0,95	0,9	4	19	380	300	0,95	0,9	3
5	250	110	0,99	0,95	1	20	400	250	0,99	0,95	4
6	150	90	0,9	0,99	2	21	180	100	0,9	0,99	1
7	450	200	0,95	0,9	3	22	290	150	0,95	0,9	2
8	200	150	0,99	0,95	4	23	380	270	0,99	0,95	3
9	150	110	0,9	0,99	1	24	410	380	0,9	0,99	4
10	210	90	0,95	0,9	2	25	190	100	0,95	0,9	1
11	320	210	0,99	0,95	3	26	220	120	0,99	0,95	2
12	430	300	0,9	0,99	4	27	330	220	0,9	0,99	3
13	160	120	0,95	0,9	1	28	460	350	0,95	0,9	4
14	220	70	0,99	0,95	2	29	120	60	0,99	0,95	1
15	340	200	0,9	0,99	3	30	230	110	0,9	0,99	2

З а д а н и е 7
Задача описательной статистики

Для каждого варианта задания из генеральной совокупности, приведенной далее, следует взять две соответствующие строки чисел. Для полученной случайной выборки объемом n=40 найти: выборочное среднее $\bar{x}$; выборочную дисперсию $D_в$; выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$; исправленную дисперсию S^2; исправленное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2}$; размах $R = x_{\max} - x_{\min}$; моду Mo; медиану Me; асимметрию $\tilde{A}$; эксцесс $\overline{E}$; построить полигон. Номера вариантов и соответствующие им пары строк чисел приведены в таблицах 13, 14.

Таблица 13

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номера строк	1, 11	2, 12	3, 13	4, 14	5, 15	6, 16	7, 17	8, 18	9, 19	10, 20
№ вар	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номера строк	1, 12	2, 13	3, 14	4, 15	5, 16	6, 17	7, 18	8, 19	9, 20	1, 13
№ вар	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номера строк	2, 14	3, 15	4, 16	5, 17	6, 18	7, 19	8, 20	1, 14	2, 15	3, 16

Таблица 14

Номер строки	Случайные числа, распределенные по нормальному закону									
1	-0,56	-0,42	-0,89	-1,79	-0,22	0,01	-0,33	0,39	0,56	1,26
	-1,85	2,52	1,02	-0,08	-0,45	0,31	-1,66	0,75	-0,01	-0,84
2	-0,27	-0,01	0,61	-1,25	-0,53	0,05	-0,35	0,42	-1,65	1,11
	-1,88	0,83	-0,54	1,43	-0,80	1,21	0,71	1,02	-0,21	1,16
3	-0,03	1,76	-1,51	1,65	0,21	-1,01	-0,33	-0,55	-0,53	-1,39
	1,34	-1,28	1,42	-0,07	-1,28	-0,75	-0,68	-0,76	0,13	-0,48
4	1,26	-0,41	-0,88	-0,46	0,54	-0,04	0,38	0,71	0,50	0,44
	1,05	-0,82	0,03	-0,75	-0,77	-0,66	-0,59	-2,50	0,23	-0,32
5	-0,49	-1,16	-0,50	1,18	-0,15	0,92	0,90	-0,53	-1,39	-1,11
	0,44	-1,09	-0,30	-0,84	-0,86	0,10	0,32	-0,48	1,29	-0,78
6	1,23	-0,22	1,65	1,10	1,52	1,08	0,60	-0,63	1,17	-0,16
	0,56	-0,32	0,44	-2,45	-0,02	-1,15	-0,72	-0,27	-1,03	0,56
7	-0,13	-0,22	0,15	1,40	-0,24	1,72	0,77	-1,65	1,82	-0,09
	0,02	-0,54	-1,07	-0,31	-0,90	0,78	0,11	0,17	-0,21	1,97
8	-1,29	-0,66	-0,53	0,63	-0,67	-0,61	0,52	-0,74	1,53	-0,28
	-0,74	-0,23	-1,39	-1,10	-1,39	1,09	1,02	-0,30	-0,30	-1,12
9	1,04	0,11	-1,20	-0,75	1,03	1,46	0,98	-0,19	-0,44	-0,45
	-0,41	-0,88	2,30	-0,54	-0,60	-1,91	0,31	-1,41	0,27	2,44
10	-0,88	0,16	-1,80	-1,17	0,56	-1,50	0,23	-0,52	-3,42	-1,90
	0,15	-0,31	-0,63	0,12	0,35	-0,90	-1,30	0,64	1,46	-0,82
11	-0,92	-1,43	0,19	-1,08	0,09	-0,05	1,12	1,39	-1,41	-0,87
	-0,10	-0,11	0,58	3,06	-2,03	0,75	-1,29	-0,27	1,24	-1,02
12	0,55	1,26	0,22	-1,59	-0,02	0,23	0,20	0,12	-1,27	0,37
	-0,83	0,91	0,19	0,25	1,55	-0,81	0,95	-0,33	-0,19	-0,96
13	1,28	-0,74	-1,36	0,27	-0,60	-0,12	0,53	0,47	1,51	-1,27
	-1,28	0,78	1,37	1,58	-0,47	0,60	-0,98	0,77	-1,11	-0,62
14	-0,38	-1,18	-1,13	-0,07	-0,68	-1,38	0,60	0,11	-1,25	0,45
	-0,58	0,65	-0,53	1,85	1,30	-0,46	-0,62	0,86	-0,09	0,09

Продолжение таблицы 14

15	0,67	1,23	0,35	-0,17	-1,80	0,24	-1,82	-0,98	-0,45	0,46
	-0,72	-0,57	1,30	-0,45	-0,04	0,47	-1,17	0,26	1,90	1,56
16	0,00	1,32	-0,42	-0,48	-1,07	-1,37	0,84	0,28	0,72	0,30
	0,12	-3,12	-1,65	-0,14	-1,62	-0,43	-0,32	-0,84	-1,70	0,48
17	0,68	0,12	-1,38	-0,03	0,34	1,45	0,27	-0,53	0,19	0,83
	0,53	-1,37	0,34	-0,55	-0,30	0,07	-1,07	-0,19	-0,30	0,59
18	0,54	-0,13	-0,72	0,98	-0,52	1,75	-1,70	1,53	2,39	-0,23
	-0,69	0,58	0,29	0,01	-2,84	0,48	-0,19	0,74	-1,97	-0,75
19	-0,41	-0,67	-0,13	1,02	0,18	0,51	0,74	-0,02	0,28	0,16
	0,43	-0,48	-0,70	3,05	-0,29	-1,28	0,76	-0,39	-1,20	-1,04
20	1,30	0,36	-0,64	0,56	1,17	0,11	-0,10	-0,85	-0,58	0,78
	0,01	-0,99	-1,29	-0,84	0,65	0,21	-1,98	1,67	-1,00	-0,23

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2003.

2. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ. 2000.

3. Вероятностные разделы математики / Под ред. *Ю.Д. Максимова*. – С.-Пб.: Иван Федоров, 2001.

4. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1979.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов / Под ред. *А.В. Ефимова*. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-матем. лит., 1990.

6. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1983.

7. *Омельченко В.П., Курбатова Э.В.* Практические занятия по высшей математике. – Ростов н/Д.: Феникс, 2003.

8. *Колемаев В*.А., *Калинина В.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Под ред. *В.А. Колемаева*. – М.: ИНФА – М, 1999. – 302с. – (Серия «Высшее образование»))

9. *Апайчева, Л*.А., Шувалова,Л.Е. Математическая статистика: учебное пособие / Апайчева Л.А., Шувалова Л.Е., Хрузина Т.А. – Казань: Изд-во Казан.гос.технол.ун-та, 2007/- 196 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 15 – Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2675
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0862	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

Продолжение таблицы 15

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 16 – Таблица значений функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2} dz$

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2901	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133		

Продолжение таблицы 16

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
1,19	0,3830	1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,48	0,4934
1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,50	0,4938
1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,52	0,4941
1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,54	0,4945
1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,56	0,4948
1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,58	0,4951
1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,60	0,4953
1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,62	0,4956
1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,64	0,4959
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,66	0,4961
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,68	0,4963
1,30	0,4032	1,65	0,4505	2,00	0,4772	2,70	0,4965
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783	2,72	0,4967
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,74	0,4969
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803	2,76	0,4971
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,78	0,4973
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,80	0,4974
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,82	0,4976
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,84	0,4977
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846	2,86	0,4979
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854	2,88	0,4980
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,90	0,4981
1,41	0,4209	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,92	0,4982
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875	2,94	0,4984
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,96	0,4985
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887	2,98	0,4986
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,00	0,49865
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898	3,20	0,49931
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904	3,40	0,49966
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909	3,60	0,499841
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913	3,80	0,499928
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,40	0,4918	4,00	0,499968
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,42	0,4922	4,50	0,499997
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,44	0,4927	5,00	0,499997
1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,46	0,4931		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Квантили $\chi^2_{\alpha,k}$ распределения χ^2_k (k – число степеней свободы, α – уровень значимости)

Критические точки распределения χ^2

k \ α	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	10,8	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	0,02	0,004	0,001	0,0002
2	13,8	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	0,21	0,10	0,05	0,02
3	16,3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	0,58	0,35	0,22	0,11
4	18,5	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	1,06	0,71	0,48	0,30
5	20,5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	1,61	1,15	0,83	0,55
6	22,5	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	2,20	1,64	1,24	0,87
7	24,3	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	2,83	2,17	1,69	1,24
8	26,1	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	3,49	2,73	2,18	1,65
9	27,9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	4,17	3,33	2,70	2,09
10	29,6	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	4,87	3,94	3,25	2,56
11	31,3	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	5,58	4,57	3,82	3,05
12	32,9	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	6,30	5,23	4,40	3,57
13	34,5	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	7,04	5,89	5,01	4,11
14	36,1	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	7,79	6,57	5,63	4,66
15	37,7	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	8,55	7,26	6,26	5,23
16	39,3	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	9,31	7,96	6,91	5,81
17	40,8	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	10,1	8,67	7,56	6,41
18	42,3	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	10,9	9,39	8,23	7,01
19	43,8	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	11,7	10,1	8,91	7,63
20	45,3	40,0	37,6	34,2	31,4	28,4	12,4	10,9	9,59	8,26
21	46,8	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	13,2	11,6	10,3	8,90
22	48,3	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	14,0	12,3	11,0	9,54
23	49,7	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	14,8	13,1	11,7	10,2
24	51,2	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	15,7	13,8	12,4	10,9
25	52,6	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	16,5	14,6	13,1	11,5
26	54,1	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	17,3	15,4	13,8	12,2
27	55,5	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	18,1	16,2	14,6	12,9
28	56,9	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	18,9	16,9	15,3	13,6
29	58,3	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	19,8	17,7	16,0	14,3
30	59,7	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	20,6	18,5	16,8	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили t распределения Стьюдента (k – число степеней свободы, α – уровень значимости)

Критические точки распределения Стьюдента

	двусторонняя критическая область							
k \ α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,29	636,58
2	1,89	2,91	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,6
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	3,93	4,325
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,69	4,01
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,50	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,48	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,47	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45	3,73
26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,43	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,04	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,31	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,23	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,16	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,09	3,29
k \ α	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0036	0,001	0,0005
	односторонняя критическая область							

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Значения F_{α,k_1,k_2} – критерия Фишера-Снедекера

Таблица 17 – Критические точки распределения Фишера

(k_1 и k_2 – число степеней свободы большей и меньшей дисперсии)

k_1 / k_2	$\alpha = 0{,}05$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	5,49	5,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08

Продолжение таблицы

60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,229	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,83	1,83
$\alpha = 0{,}01$										
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,36	99,4	99,39	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,67	27,5	27,35	27,2
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,98	14,8	14,66	14,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,46	10,3	10,16	10,1
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	417	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32

Продолжение таблицы

k_2 \ k_1	$\alpha = 0{,}05$								
	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
26	244	246	248	249	250	251	252	253	254
27	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	119,5	19,5	19,5
28	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
29	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
30	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
31	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
32	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
33	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
34	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
35	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
36	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
37	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
38	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
39	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
40	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
41	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
42	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
43	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
44	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
45	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
46	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
47	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
48	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
49	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
50	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Продолжение таблицы

$\alpha = 0{,}01$									
1	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,4	99,4	99,45	99,46	99,5	99,47	99,5	99,49	99,5
3	27,1	26,9	26,69	26,60	26,5	26,41	26,3	26,22	26,1
4	14,4	14,2	14,02	13,93	13,8	13,75	13,6	13,56	13,5
5	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,67	3,52	3,39	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,45	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Учебное издание

Апайчева Любовь Алексеевна
Кандидат физико-математических наук, доцент

Шувалова Людмила Егоровна
Старший преподаватель

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ЧАСТЬ 1

Корректор Белова И.М.
Худ. Редактор Федорова Л.Г.