Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

А.В. Садыков

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ПРАКТИКУМ

Нижнекамск 2016

УДК 510.6
С 14

Печатается по решению редакционно-издательского совета НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Апайчева Л.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент;
Саримов Н.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент.

Садыков, А.В.
С 14 Индивидуальные задания по математической логике: Практикум / А.В. Садыков. – Нижнекамск: НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2016. – 49 с.

В данном учебном пособии содержатся краткие теоретические сведения по разделам математической логики и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов. Приводятся варианты с решениями.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах», «Автоматизация технологических процессов и производств».

Подготовлены на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института.

УДК 510.6

© Садыков А.В., 2016
© НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2016

1. Операции над высказываниями

В логике высказываний в качестве основных приняты следующие пять операций над высказываниями: ***одноместная*** (***унарная***) ***операция отрицания*** и ***двуместные*** (***бинарные***) ***операции – конъюнкция, дизъюнкция, импликация*** и ***эквивалентность***. Определения этих операций удобно представить в виде таблицы, где истина представляется значением 1, а ложь – значением 0. Операции расположены в таблице в перечисленном выше порядке.

Таблица логических операций

a	b	$\bar{a}$	$a \& b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Иногда для упрощения записи скобки при образовании сложных высказываний опускают, при этом приоритет логических операций следующий: $\bar{\ }$, $\&$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Пример. Решить систему логических уравнений:

$$\begin{cases} a \to b \& c = 1; \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0. \end{cases}$$

Решение: *Первый способ*. Решаем первое уравнение системы. Отыскав все решения первого уравнения, выбираем из них те, которые удовлетворяют второму уравнению.
$a \to b \& c = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b \& c = 0; \quad a = 0,\ b \& c = 1; \quad a = 1,\ b \& c = 1$.
Отсюда решениями первого уравнения будут

1) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; 2) $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$;
3) $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; 4) $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$;
5) $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

Подставив найденные решения во второе уравнение, найдем решение системы

1) $0 \vee 0 \leftrightarrow 0 = 1 \neq 0$;   2) $0 \vee 0 \leftrightarrow 1 = 0 = 0$;

3) $0 \vee 1 \leftrightarrow 0 = 0 = 0$;   4) $0 \vee 1 \leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$;

5) $1 \vee 1 \leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$.

Таким образом, решениями системы будут второе и третье решения первого уравнения, то есть

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 1; \quad a = 0,\ b = 1,\ c = 0.$$

Второй способ. Строим таблицы истинности для левых частей первого и второго уравнений и подчеркиваем строки, в которых их значения совпадают с соответствующими значениями правых частей уравнений.

a	b	c	(1) $b \,\&\, c$	$a \to (1)$	(2) $a \vee b$	$(2) \leftrightarrow b$
0	0	0	0	1	0	1
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	0	1	0	0
$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Решения: $a = 0,\ b = 0,\ c = 1; \quad a = 0,\ b = 1,\ c = 0;$

Задача 1

Решить системы логических уравнений:

1. **а)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 0, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ a \to b \,\&\, c = 1. \end{cases}$

2. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ a \to b \,\&\, c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \vee b \to c = 0, \\ \bar{a} \to b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

3. **а)** $\begin{cases} \bar{a} \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ \bar{a} \vee b \to c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \vee b \to c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, c = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \,\&\, (c \to b) = 1, \\ a \to b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 1, \\ a \vee b \to c = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ \bar{a} \to b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 1, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow \bar{c} = 0, \\ a \to b \vee \bar{c} = 0. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ a \vee b \to c = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \vee b \to c = 0, \\ \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, c = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 0, \\ a \vee b \to c = 1. \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} a \vee b \to \bar{c} = 0, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, \bar{c} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \vee b \to c = 0, \\ b \,\&\, (\bar{a} \to c) = 0. \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} \bar{a} \to b \,\&\, c = 0, \\ \bar{a} \leftrightarrow b \vee c = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow \bar{c} = 1, \\ a \to b \,\&\, \bar{c} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ \bar{a} \,\&\, (b \to c) = 0. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} a \leftrightarrow b \,\&\, c = 0, \\ a \to b \,\&\, c = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} a \vee b \to \bar{c} = 1, \\ a \to b \,\&\, \bar{c} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \to b \,\&\, c = 1, \\ (\bar{a} \to b) \,\&\, c = 0. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} \bar{a} \to b \,\&\, c = 0, \\ \bar{a} \vee b \leftrightarrow c = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \vee b \to c = 0, \\ b \,\&\, (\bar{a} \leftrightarrow c) = 0. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} a \vee b \to \bar{c} = 0, \\ a \to b \,\&\, \bar{c} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \,\&\, (c \leftrightarrow b) = 1, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} a \,\&\, (b \to c) = 1, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \bar{a} \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ \bar{a} \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 0. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \vee (b \leftrightarrow c) = 1, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 0, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 1, \\ (\bar{a} \to b) \,\&\, c = 0. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \vee (b \leftrightarrow c) = 1, \\ a \vee b \to c = 0. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} a \,\&\, (b \to c) = 1, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

21. а) $\begin{cases} a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 1, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1. \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow \bar{c} = 0, \\ a \vee (b \leftrightarrow \bar{c}) = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 1, \\ (\bar{a} \leftrightarrow b) \,\&\, c = 0. \end{cases}$

23. а) $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

24. а) $\begin{cases} a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 1, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \to c) = 0, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1. \end{cases}$

25. а) $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} (a \leftrightarrow b) \vee c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

2. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Теорема 1. *Любая формула $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ в алгебре высказываний имеет равносильную ей КНФ.*

При преобразовании формулы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ в КНФ используются следующие равносильности в указанной последовательности:

1) $x \to y \cong \bar{x} \vee y,\ x \leftrightarrow y \cong (\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{y} \vee x)$;

2) $\overline{x \,\&\, y} \cong \bar{x} \vee \bar{y},\ \overline{x \vee y} \cong \bar{x} \,\&\, \bar{y}$;

3) $x \vee (y \,\&\, z) \cong (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$.

Теорема 2. *Формула F является* ***тавтологией*** *тогда и* *только тогда, когда в её **КНФ** в каждом дизъюнктивном одночлене какая-то переменная встречается вместе со своим отрицанием.*

Пример. Найти КНФ формулы F: $F = (x \leftrightarrow y) \& \overline{(z \to t)}$. Является ли формула F тавтологией?

Решение

$$F = (x \leftrightarrow y) \& \overline{(z \to t)} \cong ((\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee x)) \& \overline{(z \to t)} \cong$$
$$\cong ((\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee x)) \& z \& \bar{t} = (\bar{x} \vee y) \& (\bar{y} \vee x) \& z \& \bar{t}.$$

Последнее выражение является КНФ, так как представляет собой конъюнкцию дизъюнктивных одночленов $Д_1 = (\bar{x} \vee y)$, $Д_2 = (\bar{y} \vee x)$, $Д_3 = z$, $Д_4 = \bar{t}$. Очевидно, формула F не является тавтологией, так как условие теоремы 2 не выполняется.

Задача 2

Найти КНФ формул F. Являются ли формулы F тавтологиями?

1. а) $F = (a \& b \leftrightarrow a) \vee (a \vee b \leftrightarrow \bar{b})$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \to (\bar{a} \& \bar{b} \leftrightarrow \bar{c})$.

2. а) $F = (a \& b \leftrightarrow b) \vee (a \vee b \leftrightarrow \bar{a})$; **б)** $F = (a \& b \leftrightarrow c) \to (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow \bar{c})$.

3. а) $F = (a \& b \leftrightarrow a) \vee (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (\bar{a} \& \bar{b} \leftrightarrow \bar{c}) \to (a \vee b \leftrightarrow c)$.

4. а) $F = (a \& b \leftrightarrow b) \vee (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow \bar{c}) \to (a \& b \leftrightarrow c)$.

5. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \bar{a}) \vee (a \vee b \leftrightarrow b)$; **б)** $F = ((a \to b) \leftrightarrow c) \to (a \& \bar{b} \leftrightarrow \bar{c})$.

6. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \bar{b}) \vee (a \vee b \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (a \& \bar{b} \leftrightarrow \bar{c}) \to ((a \to b) \leftrightarrow c)$.

7. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \bar{a}) \vee (\bar{a} \& \bar{b} \leftrightarrow \bar{b})$; **б)** $F = (a \leftrightarrow (b \to c)) \to (\bar{a} \leftrightarrow b \leftrightarrow \bar{c})$.

8. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \bar{b}) \vee (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow \bar{a})$; **б)** $F = (\bar{a} \leftrightarrow b \& \bar{c}) \to (a \leftrightarrow (b \to c))$.

9. а) $F = (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow a) \vee (a \vee b \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow b \& c) \to (a \to b \vee c)$.

10. а) $F = (\bar{a} \vee \bar{b} \leftrightarrow b) \vee (a \vee b \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow b \& c) \to (a \& b \to c)$.

11. а) $F = (\bar{a} \& \bar{b} \leftrightarrow a) \vee (\bar{a} \& \bar{b} \leftrightarrow \bar{b})$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \to (a \to b \vee c)$.

12. а) $F=(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow b)\vee(\bar a\,\&\,\bar b\leftrightarrow\bar a)$; **б)** $F=(a\vee b\leftrightarrow c)\to(a\,\&\,b\to c)$.

13. а) $F=(\bar a\,\&\,\bar b\leftrightarrow\bar a)\vee(a\vee b\leftrightarrow\bar b)$; **б)** $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow c)\to(c\to a\vee b)$.

14. а) $F=(a\leftrightarrow b)\vee(\bar a\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow c)\to(b\,\&\,c\to a)$.

15. а) $F=(a\leftrightarrow b)\vee(a\leftrightarrow\bar b)$; **б)** $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow c)\to(a\,\&\,c\to b)$.

16. а) $F=(a\leftrightarrow b)\to(\bar a\leftrightarrow\bar b)$; **б)** $F=(a\vee b\leftrightarrow c)\vee(a\vee b\leftrightarrow\bar c)$.

17. а) $F=(\bar a\leftrightarrow\bar b)\to(a\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow c)\vee(a\,\&\,b\leftrightarrow\bar c)$.

18. а) $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow a)\to(a\vee b\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\vee(\bar a\leftrightarrow b\vee c)$.

19. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow b)\to(a\,\&\,b\leftrightarrow a)$; **б)** $F=(a\leftrightarrow b\,\&\,c)\vee(\bar a\leftrightarrow b\,\&\,c)$.

20. а) $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow b)\to(a\vee b\leftrightarrow a)$; **б)** $F=(a\vee b\leftrightarrow c)\vee(\bar a\,\&\,\bar b\leftrightarrow c)$.

21. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow a)\to(a\,\&\,b\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow c)\vee(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow c)$.

22. а) $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow\bar a)\to(a\vee b\leftrightarrow\bar b)$; **б)** $F=(a\,\&\,\bar b\leftrightarrow c)\vee(\bar a\vee b\leftrightarrow c)$.

23. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow\bar b)\to(a\,\&\,b\leftrightarrow\bar a)$; **б)** $F=(\bar a\vee b\leftrightarrow c)\vee(a\,\&\,\bar b\leftrightarrow c)$.

24. а) $F=(a\,\&\,b\leftrightarrow\bar b)\to(a\vee b\leftrightarrow\bar a)$; **б)** $F=((a\to b)\leftrightarrow c)\vee((a\to b)\leftrightarrow\bar c)$.

25. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow\bar a)\to(a\,\&\,b\leftrightarrow\bar b)$; **б)** $F=(a\leftrightarrow(b\to c))\vee(a\leftrightarrow b\,\&\,\bar c)$.

3. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Теорема 1. *Любая формула $F(x_1,x_2,...,x_n)$ в алгебре высказываний имеет равносильную ей ДНФ.*

При преобразовании формулы $F(x_1,x_2,...,x_n)$ в ДНФ используются в указанной последовательности следующие равносильности:

1) $x\to y\cong\bar x\vee y,\ x\leftrightarrow y\cong(\bar x\vee y)\,\&\,(\bar y\vee x)$;

2) $\overline{x\,\&\,y}\cong\bar x\vee\bar y,\ \overline{x\vee y}\cong\bar x\,\&\,\bar y$;

3) $x \& (y \vee z) \cong x \& y \vee x \& z$.

Т е о р е м а 2 . *Формула $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является* ***противоречием*** *тогда и только тогда, когда в ее* ***ДНФ*** *в каждом конъюнктивном одночлене некоторая переменная встречается вместе со своим отрицанием.*

Пример. Найти ДНФ формулы F:

$$F = ((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z})) \leftrightarrow ((x \to y) \& (x \to z)).$$

Является ли формула F противоречием?

Решение

$$((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z})) \leftrightarrow ((x \to y) \& (x \to z)) \cong (\overline{((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z}))} \vee$$
$$\vee ((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z))) \& (\overline{((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z))} \vee ((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z}))) \cong$$
$$\cong (((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z)) \vee ((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z))) \& (((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z})) \vee$$
$$\vee ((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z}))) \cong (\bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z) \vee$$
$$\vee (\bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z) \& (x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z}) \cong$$
$$\cong (\bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z \vee \bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z) \&$$
$$\& (x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z}) \cong \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \&$$
$$\& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& z \&$$
$$\& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \&$$
$$\& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \&$$
$$\& z \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \& z \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \&$$
$$\& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \&$$
$$\& z \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \&$$
$$\& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \&$$
$$\& z \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \& z \& x \& \bar{z} \cong 0.$$

Поскольку полученная формула является дизъюнкцией конъюнктивных одночленов, то это ДНФ. Согласно теореме 2, она равносильна 0, то есть является противоречием.

Следует заметить, что самый быстрый переход от ДНФ к КНФ и обратно осуществляется на основе «***чудо - закона***».

З а д а ч а 3

Найти ДНФ формулы F. Является ли формула F противоречием?

1. а) $F=(a\&b\leftrightarrow a)\&(a\vee b\leftrightarrow\bar b)$; б) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar b)\&(b\&c\leftrightarrow\bar c)$.

2. а) $F=(a\&b\leftrightarrow b)\&(a\vee b\leftrightarrow\bar a)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\&c)\&(a\vee b\leftrightarrow\bar b)$.

3. а) $F=(a\&b\leftrightarrow a)\&(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow b)$; б) $F=(a\&c\leftrightarrow\bar a)\&(b\&c\leftrightarrow\bar c)$.

4. а) $F=(a\&b\leftrightarrow b)\&(\bar a\&\bar b\leftrightarrow a)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\&b\leftrightarrow\bar b)$.

5. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar a)\&(a\vee b\leftrightarrow b)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\vee c\leftrightarrow\bar c)$.

6. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar b)\&(a\vee b\leftrightarrow a)$; б) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar a)\&(b\&c\leftrightarrow\bar b)$.

7. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar a)\&(\bar a\&\bar b\leftrightarrow\bar b)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\&c\leftrightarrow\bar c)$.

8. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar b)\&(\bar a\&\bar b\leftrightarrow\bar a)$; б) $F=(\bar a\leftrightarrow b\&c)\&(a\&\bar b\leftrightarrow b)$.

9. а) $F=(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow a)\&(a\vee b\leftrightarrow b)$; б) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar b)\&(a\&c\leftrightarrow\bar a)$.

10. а) $F=(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow b)\&(a\vee b\leftrightarrow a)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\&c)\&(\bar a\&\bar b\rightarrow b)$.

11. а) $F=(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow a)\&(\bar a\&\bar b\leftrightarrow\bar b)$; б) $F=(\bar a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\vee\bar b\leftrightarrow b)$.

12. а) $F=(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow b)\&(\bar a\&\bar b\leftrightarrow\bar a)$; б) $F=(a\&c\leftrightarrow\bar c)\&(b\&c\rightarrow\bar b)$.

13. а) $F=(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow\bar a)\&(a\vee b\leftrightarrow\bar b)$; б) $F=(\bar a\leftrightarrow b\&c)\&(a\&\bar c\leftrightarrow c)$.

14. а) $F=(a\leftrightarrow b)\&(\bar a\leftrightarrow b)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow b)$.

15. а) $F=(a\leftrightarrow b)\&(a\leftrightarrow\bar b)$; б) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar a)\&(a\&c\leftrightarrow\bar c)$.

16. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow\bar b)\leftrightarrow(a\rightarrow b)$; б) $F=(a\vee b\leftrightarrow c)\&(a\vee b\leftrightarrow\bar c)$.

17. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\bar b)\leftrightarrow(b\rightarrow a)$; б) $F=(a\&b\leftrightarrow c)\&(a\&b\leftrightarrow\bar c)$.

18. а) $F=((b\rightarrow a)\leftrightarrow\bar b)\leftrightarrow(a\&b)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(\bar a\leftrightarrow b\vee c)$.

19. а) $F=((a\rightarrow b)\leftrightarrow\bar b)\leftrightarrow(a\vee b)$; б) $F=(a\leftrightarrow b\&c)\&(\bar a\leftrightarrow b\&c)$.

20. а) $F=((b\rightarrow\bar a)\leftrightarrow b)\leftrightarrow(b\rightarrow a)$; б) $F=(a\vee b\leftrightarrow c)\&(\bar a\&\bar b\leftrightarrow c)$.

21. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow\bar a)\leftrightarrow(b\rightarrow a)$; б) $F=(a\&b\leftrightarrow c)\&(\bar a\vee\bar b\leftrightarrow c)$.

22. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \bar{a}) \leftrightarrow (a \to b)$; **б)** $F = (a \& \bar{b} \leftrightarrow c) \& (a \vee b \leftrightarrow c)$.

23. а) $F = ((a \to b) \leftrightarrow \bar{a}) \leftrightarrow (a \& b)$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \& (a \& \bar{b} \leftrightarrow c)$.

24. а) $F = ((b \to a) \leftrightarrow \bar{a}) \leftrightarrow (a \vee b)$; **б)** $F = ((a \to b) \leftrightarrow c) \& ((a \to b) \leftrightarrow \bar{c})$.

25. а) $F = ((a \to \bar{b}) \leftrightarrow \bar{a}) \leftrightarrow (a \to b)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow (b \to c)) \& (a \leftrightarrow b \& \bar{c})$.

4. Равносильность формул

Две формулы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются ***равносильными*** $(F(x_1, x_2, ..., x_n) \cong G(x_1, x_2, ..., x_n))$, если для любых конкретных высказываний $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, ...,\ x_n = a_n$ их значения совпадают.

Очевидно, если формулы F, G равносильны, то их таблицы истинности совпадают. Поэтому доказать равносильность двух формул можно, построив их таблицы истинности.

Другой способ доказательства связан с использованием равносильных преобразований формул, основанных на **лемме о замене**, именно: если $F \cong G$ и $H(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ – произвольная формула, то

$$H(x_1, x_2, ..., F, ..., x_n) \cong H(x_1, x_2, ..., G, ..., x_n).$$

Равносильность формул можно также доказать приведением их к СКНФ или СДНФ.

Пример. Доказать равносильность формул

$$F = (P \to Q) \& (Q \to \bar{P}) \& (R \to P) \cong \bar{P} \& \bar{R} = G$$

с помощью: 1) таблиц истинности; 2) равносильных преобразований.

Решение: *Первый способ*. Строим таблицы истинности для формул F и G:

P	Q	R	(1) $P \to Q$	(2) $Q \to \overline{P}$	(3) $R \to P$	F (1)&(2)&(3)	G $\overline{P} \,\&\, \overline{R}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
I	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0

Из построенных таблиц для F и G видно, что их значения для конкретных высказываний совпадают.

Второй способ. Приведём формулу F равносильными преобразованиями к формуле G.

$$F = (P \to Q) \,\&\, (Q \to \overline{P}) \,\&\, (R \to P) \overset{(1)}{\cong} (\overline{P} \vee Q) \,\&\, (\overline{Q} \vee \overline{P}) \,\&\, (\overline{R} \vee P) \overset{(2)}{\cong}$$

$$\overset{(2)}{\cong} ((\overline{P} \,\&\, \overline{Q}) \vee (\overline{P} \,\&\, \overline{P}) \vee (Q \,\&\, \overline{Q}) \vee (Q \,\&\, \overline{P})) \,\&\, (\overline{R} \vee P) \overset{(3)}{\cong} \overline{P} \,\&\, (\overline{R} \vee P) \overset{(4)}{\cong}$$

$$\overset{(4)}{\cong} \overline{P} \,\&\, \overline{R} \vee \overline{P} \,\&\, P \cong \overline{P} \,\&\, \overline{R} = G.$$

Преобразование (1) осуществляется с использованием равносильности $x \to y = \overline{x} \vee y$. Преобразование (2) осуществляется с использованием дистрибутивности операции & относительно $\vee$ к двум первым скобкам.

Преобразование (3) осуществляется с использованием следующих равносильностей:

а) $x \,\&\, x \cong x$; б) $x \,\&\, (x \vee y) \cong x$;

в) $x \,\&\, \overline{x} \cong 0$; г) $x \vee 0 \cong x$.

Преобразование (4) осуществляется с использованием дистрибутивности операции & относительно $\vee$. Преобразование (5) осуществляется с использованием равносильностей в), г), использованных при преобразовании (3).

Задача 4

Доказать равносильность формул: 1) составлением таблиц истинности; 2) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью равносильных преобразований.

1. а) $a \leftrightarrow (a \to b) = b \leftrightarrow (b \to a)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \vee c = a \vee c \leftrightarrow b \vee c$.

2. а) $(a \leftrightarrow b) \to b = (a \leftrightarrow b) \to a$; **б)** $a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = a \,\&\, b \leftrightarrow \bar{a} \vee c$.

3. а) $a \to (a \leftrightarrow b) = \bar{b} \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \to (b \leftrightarrow c) = a \,\&\, b \leftrightarrow a \,\&\, c$.

4. а) $\bar{a} \leftrightarrow (b \to a) = \bar{b} \leftrightarrow (a \to b)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \to c = (\bar{a} \to c) \leftrightarrow (b \to c)$.

5. а) $a \leftrightarrow (b \to a) = b \leftrightarrow (a \to b)$; **б)** $c \to (a \leftrightarrow b) = (c \to a) \leftrightarrow (c \to b)$.

6. а) $b \to (a \leftrightarrow b) = \bar{a} \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \,\&\, b \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \to b)$.

7. а) $a \vee b \leftrightarrow b = a \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \vee c = (a \to b) \leftrightarrow (b \to c)$.

8. а) $\bar{a} \leftrightarrow (a \to b) = \bar{b} \leftrightarrow (b \to a)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \,\&\, c = a \vee \bar{c} \leftrightarrow b \,\&\, c$.

9. а) $a \leftrightarrow a \,\&\, b = a \vee b \leftrightarrow b$; **б)** $c \to (a \leftrightarrow b) = \bar{a} \,\&\, c \leftrightarrow \bar{b} \,\&\, c$.

10. а) $(a \leftrightarrow b) \to \bar{b} = (a \leftrightarrow b) \to \bar{a}$; **б)** $\bar{a} \to (b \leftrightarrow c) = (b \to a) \leftrightarrow (c \to a)$.

11. а) $(\bar{a} \leftrightarrow b) \to b = a \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \to (b \leftrightarrow c) = (a \to \bar{b}) \leftrightarrow (a \to \bar{c})$.

12. а) $a \,\&\, b \leftrightarrow b = a \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $a \vee b \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (b \to a)$.

13. а) $a \leftrightarrow a \,\&\, b = a \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \vee (b \leftrightarrow c) = a \vee \bar{b} \leftrightarrow a \vee \bar{c}$.

14. а) $(\bar{a} \leftrightarrow b) \to a = b \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $b \,\&\, (a \leftrightarrow c) = a \vee \bar{b} \leftrightarrow b \,\&\, c$.

15. а) $\bar{b} \leftrightarrow (\bar{b} \to a) = \bar{a} \leftrightarrow a \,\&\, b$; **б)** $a \,\&\, b \leftrightarrow c = (b \leftrightarrow c) \leftrightarrow (b \to a)$.

16. а) $b \to (a \leftrightarrow b) = a \& b \leftrightarrow b$; **б)** $(a \leftrightarrow c) \to b = (a \to b) \leftrightarrow (c \to b)$.

17. а) $a \vee b \leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \leftrightarrow a \& b$; **б)** $b \to (a \leftrightarrow c) = (a \to \bar{b}) \leftrightarrow (c \to \bar{b})$.

18. а) $\bar{b} \to (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow a \& b$; **б)** $(a \to b) \leftrightarrow c = (\bar{a} \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \to \bar{b})$.

19. а) $\bar{a} \to (a \leftrightarrow b) = a \& b \leftrightarrow b$; **б)** $b \vee (a \leftrightarrow c) = (a \& \bar{b}) \leftrightarrow (\bar{b} \& c)$.

20. а) $a \& b \leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $(b \leftrightarrow c) \& \bar{a} = \bar{a} \& \bar{b} \leftrightarrow a \vee \bar{c}$.

21. а) $b \leftrightarrow (\bar{b} \to a) = \bar{a} \leftrightarrow (a \to \bar{b})$; **б)** $a \vee b \leftrightarrow c = (b \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \to b)$.

22. а) $b \to (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $\bar{a} \leftrightarrow (b \to c) = (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \to \bar{c})$.

23. а) $\bar{b} \to (a \leftrightarrow b) = a \vee b \leftrightarrow b$; **б)** $a \leftrightarrow b \& c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (c \to b)$.

24. а) $\bar{a} \leftrightarrow (\bar{a} \to b) = \bar{b} \leftrightarrow a \& b$; **б)** $(b \to a) \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (\bar{a} \to b)$.

25. а) $\bar{a} \to (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $(\bar{a} \leftrightarrow \bar{b}) \& \bar{c} = a \vee c \leftrightarrow b \& \bar{c}$.

5. Логическое следование

Формула H является ***логическим следствием*** формул $F_1, F_2, ..., F_m$, если из одновременной истинности формул $F_1, F_2, ..., F_m$ следует истинность формулы H. Таким образом, если построить таблицу истинности формул $F_1, F_2, ..., F_m$, H, то в строках таблицы, в которых все формулы $F_1, F_2, ..., F_m$ одновременно истинны, формула H, если она является следствием $F_1, F_2, ..., F_m$, обязана также быть истинной. В этом случае пишут $F_1, F_2, ..., F_m \models H$.

При дедуктивных рассуждениях, когда из некоторых суждений выводится умозаключение, говорят, что ***умозаключение правильное***, если оно является логическим следствием данных суждений.

Проверить правильность умозаключения можно ***методом от противного***. Мы предполагаем, что H не является логическим следствием $F_1, F_2, ..., F_m$. Тогда должна быть ситуация, при которой $H = 0$, а $F_1, F_2, ..., F_m$ все одновременно истинны. Если во всех случаях, при которых $H = 0$, по крайней мере, одна из формул $F_1, F_2, ..., F_m$ ложная, то мы приходим к ***противоречию***, и ***умозаключение правильное***. Если же хотя бы в одном случае мы найдём, что все $F_1, F_2, ..., F_m$ истинны, то умозаключение не является правильным.

Пример. Проверить правильность умозаключения методом от противного:

"Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто".

Решение. Используя аппарат алгебры высказываний, запишем наши высказывания в виде выражений, использующих обозначения логических операций и простых высказываний. *Обозначения*:

1) завтра будет холодно $-$ a;

2) я надену тёплое пальто $-$ b;

3) рукав пальто будет починен $-$ c.

Заданные суждения: $F_1 = a \to (b \to c)$, $F_2 = a \,\&\, \bar{c}$.

Умозаключение: $H = \bar{b}$.

Пусть $H = \bar{b} = 0 \;\Rightarrow\; b = 1$. Если $F_2 = a \,\&\, \bar{c} = 1$, то $a = 1$, $c = 0$. Тогда $F_1 = a \to (b \to c) = 1 \to (1 \to 0) = 0$.

Отсюда следует, что умозаключение правильное.

Задача 5

Проверить правильность умозаключений методом от противного:

1. а) Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то он является параллелограммом. Если четырехугольник – ромб, то его противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, если четырехугольник – ромб, то он – параллелограмм.

б) Матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной и ее определитель отличен от нуля. Матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Следовательно, матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной.

2. а) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно равны и параллельны. Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то они равны. Следовательно, четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны.

б) Если система векторов содержит нулевой вектор или два одинаковых вектора, то она является линейно зависимой. Данная система векторов линейно независима. Следовательно, система не содержит ни нулевого вектора, ни одинаковых векторов.

3. а) Если формула является выполнимой, то она является тавтологией или не является противоречием. Если формула – тавтология, то она не является противоречием. Следовательно, если формула – выполнимая, то она не является противоречием.

б) Если матрица A – невырожденная, то ее определитель отличен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица A – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, матрица A – невырожденная тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

4. а) Если число векторов совпадает с рангом системы, то система векторов линейно независима и является базисом. Если система векторов линейно независима или является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов является базисом тогда и только тогда, когда число векторов в ней совпадает с рангом системы.

б) Если я приду в институт и получу стипендию, то я пойду на занятия. Если я приду в институт и не пойду на занятия, то я все равно получу стипендию. Следовательно, я пойду на занятия или не приду в институт.

5. а) Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность монотонная и имеет предел, то она ограничена. Данная последовательность монотонная. Следовательно, монотонная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

б) Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали или все его углы равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

6. а) Если данный параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Данный параллелограмм не является квадратом. Следовательно, если данный параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником.

б) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3 или на 9. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3. Следовательно, если сумма цифр в десятичной записи делится на 9, то число делится на 3.

7. а) Матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной и ее определитель отличен от нуля. Матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Следовательно, матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

б) Если четырехугольник – параллелограмм, то его противоположные стороны попарно параллельны. Если четырехугольник – ромб, то две его противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, если четырехугольник – ромб, то он – параллелограмм.

8. а) Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны и углы при основании равны. Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны. Следовательно, если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании.

б) Четырехугольник является квадратом или ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Если четырехугольник – квадрат, то он является и ромбом. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

9. а) Если матрица A – невырожденная, то ее определитель отличен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица A – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, если матрица A – невырожденная и ее определитель отличен от нуля, то строки этой матрицы образуют линейно независимую систему векторов.

б) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны равны и параллельны. Данный четырехугольник имеет равные противоположные стороны. Следовательно, данный четырехугольник будет параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны параллельны.

10. а) Целое число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Данное число не делится на 6. Следовательно, если данное число делится на 2, то оно не делится на 3.

б) Если число векторов совпадает с рангом системы, то система векторов линейно независима и является базисом. Если система векторов линейно независима или является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов является базисом тогда и только тогда, когда она линейно независима.

11. а) Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали или все его углы равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда все его углы равны.

б) Если функция дифференцируемая и ее производная положительна, то функция монотонно возрастающая. Если функция дифференцируемая и монотонно возрастающая, то производная функции положительна. Следовательно, если функция дифференцируемая, то она является монотонно возрастающей тогда и только тогда, когда ее производная положительна.

12. а) Если волки будут сыты, а овцы целы, то пастухи будут довольны. Если волки не будут сыты, то пастухи будут довольны тогда и только тогда, когда овцы целы. Следовательно, если пастухи довольны, то волки сыты или овцы целы.

б) Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2 или на 4. Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2. Следовательно, если число делится на 4, то оно четное и делится на 2.

13. а) Неверно, что если Анри украл машину, то Луи и Том видели это. Луи видел, как Анри украл машину. Следовательно, Анри украл машину, но Том не видел этого.

б) Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается нулем или цифрой 5. Данное число не оканчивается цифрой 5. Следовательно, данное число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается нулем.

14. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Следовательно, если целое число делится на 2, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3.

б) Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны и углы при основании равны. Если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании. Следовательно, треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны.

15. **а)** Подсистема векторов является базисом исходной системы тогда и только тогда, когда она линейно независима и любой вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы. Данная подсистема векторов является линейно независимой. Следовательно, данная подсистема векторов является базисом исходной системы тогда и только тогда, когда любой вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы.

б) Если сторож выходил на работу и у преступника был ключ, то ограбление произошло в субботу. Если у преступника был ключ, и ограбление произошло в субботу, то сторож не выходил на работу. Следовательно, если сторож выходил на работу, то у преступника не было ключа.

16. **а)** Если число векторов совпадает с рангом системы, то система векторов линейно независима и является базисом. Если система векторов линейно независима или является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда число векторов в ней совпадает с рангом системы.

б) Целое число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Если данное число делится на 2, то оно не делится на 3. Следовательно, данное число не делится на 6.

17. а) Если производная функции в точке равна нулю и при переходе через нее меняет знак с плюса на минус, то данная точка является точкой максимума функции. Если производная в точке равна нулю и эта точка является точкой максимума функции, то производная при переходе через нее меняет знак с плюса на минус. Следовательно, если производная в точке равна нулю, то точка является точкой максимума тогда и только тогда, когда производная при переходе через нее меняет знак с плюса на минус.

б) Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда диагонали или все его углы равны.

18. а) Система линейных уравнений разрешима и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число неизвестных совпадает с рангом системы. Число неизвестных данной системы линейных уравнений не совпадает с рангом системы. Следовательно, если система линейных уравнений разрешима, то она имеет неединственное решение.

б) Если музыкант принесет ноты, то мы пойдем на его концерт, если инструмент будет настроен. Если инструмент будет настроен, то музыкант принесет ноты, если мы придем на его концерт. Инструмент будет настроен. Следовательно, мы придем на концерт тогда и только тогда, когда музыкант принесет ноты.

19. а) Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб. Следовательно, параллелограмм является ромбом, если все его стороны равны или диагонали перпендикулярны.

б) Известно, что свидетель ошибся или злоумышленник не уехал в экипаже. Если злоумышленник имел сообщника, то он уехал в экипаже. У злоумышленника не было ни сообщника, ни ключа или у него был сообщник и был ключ. Следовательно, если у злоумышленника был ключ, то свидетель ошибся.

20. а) Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны. Если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании. Следовательно, треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны и углы при основании равны.

б) Если я сдам все зачеты и экзамен по логике, то пойду на свидание. Если я сдам экзамен по логике и не пойду на свидание, то я сдам все зачеты. Следовательно, либо я пойду на свидание, либо не сдам экзамен по логике.

21. а) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3. Если число делится на 9, то оно делится на 3, Следовательно, если число делится на 9, то сумма его цифр в десятичной записи делится на 3.

б) Если функция дифференцируемая и ее производная монотонно возрастает, то функция является выпуклой вниз. Если функция дифференцируемая и является выпуклой вниз, то ее производная монотонно возрастает. Следовательно, если функция дифференцируемая, то она является выпуклой вниз тогда и только тогда, когда ее производная монотонно возрастает.

22. а) Четырехугольник является квадратом или ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Четырехугольник не является квадратом. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

б) Если матрица A – невырожденная, то ее определитель отличен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица A – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, определитель отличен от нуля тогда и только тогда, когда матрица A является невырожденной и ее строки образуют линейно независимую систему векторов.

23. а) Четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда он является квадратом или когда все его стороны равны. Если четырехугольник является квадратом, то все его стороны равны. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

б) Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность монотонная и имеет предел, то она ограничена. Следовательно, если последовательность монотонная, то она ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

24. а) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны или когда его диагонали в точке Пересечения делятся пополам.

б) Система линейных уравнений разрешима и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число неизвестных совпадает с рангом системы. Данная система линейных уравнений имеет неединственное решение. Следовательно, число неизвестных данной системы не совпадает с рангом.

25. а) Если прямая l перпендикулярна прямым a и b, то прямые a и b параллельны. Если l перпендикулярна прямой b и прямые a и b параллельны, то l перпендикулярна a. Следовательно, если l перпендикулярна прямой b, то прямые a и b параллельны тогда и только тогда, когда l перпендикулярна прямой a.

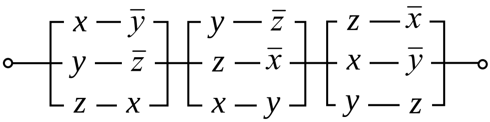
б) Два множества равны друг другу тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Следовательно, два множества не равны друг другу тогда и только тогда, когда они не состоят из одних и тех же элементов.

6. Упрощение релейно–контактных схем (РКС)

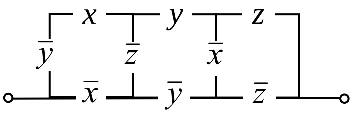
Под РКС понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Вопросы анализа, синтеза, а также упрощения РКС рассмотрены в [3], [4].

З а д а ч а 6

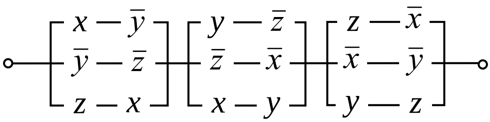
Упростите РКС так, чтобы она содержала не более N контактов.

1. а) 

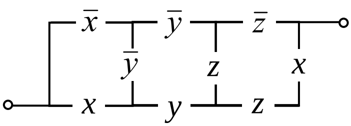
$N = 3$

б) 

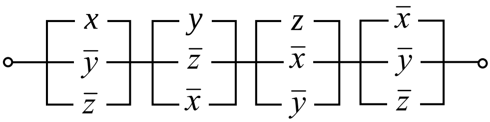
$N = 5$

2. а) 

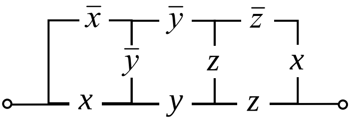
$N = 6$

б) 

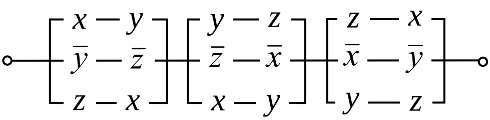
$N = 4$

3. а) 

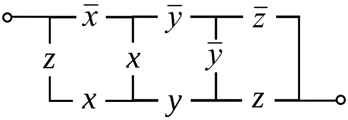
$N = 5$

б) 

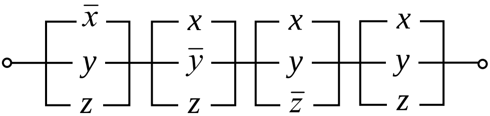
$N = 5$

4. а) 

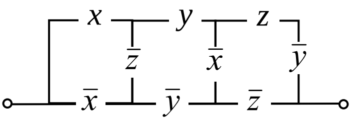
$N = 6$

б) 

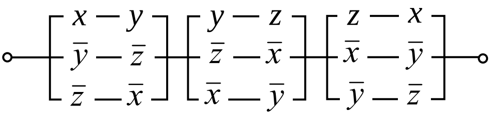
$N = 4$

5. а) 

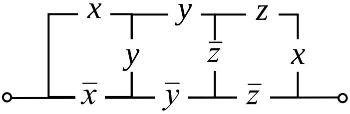
$N = 5$

б) 

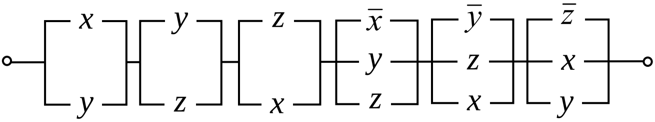
$N = 5$

6. а) 

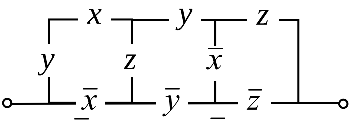
$N = 6$

б) 

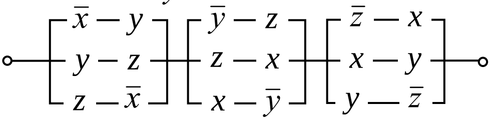
$N = 4$

7. а) 

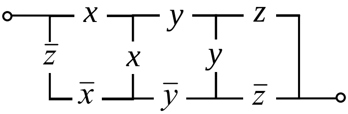
$N = 5$

б) 

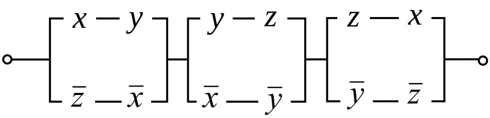
$N = 4$

8. а) 

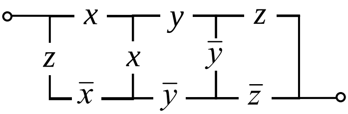
$N = 3$

б) 

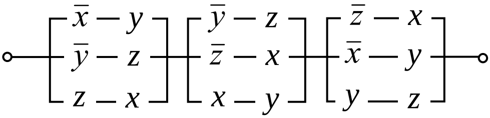
$N = 4$

9. а) 

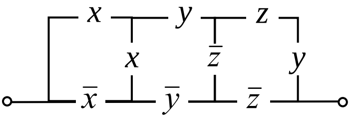
$N = 6$

б) 

$N = 5$

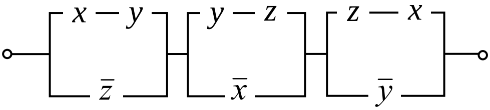
10. а) 

$N = 3$

б) 

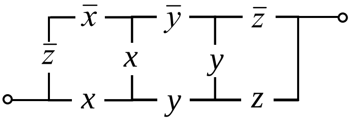
$N = 4$

11. а)



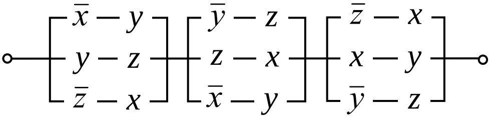
$N = 6$

б)



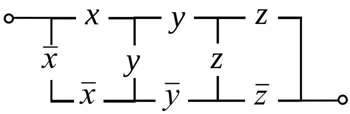
$N = 4$

12. а)



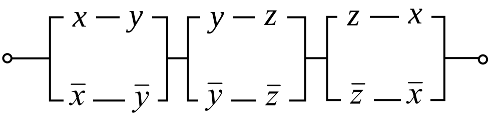
$N = 3$

б)



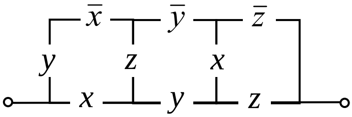
$N = 4$

13. а)



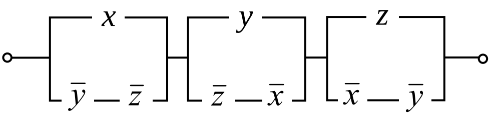
$N = 6$

б)



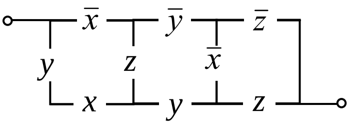
$N = 5$

14. а)

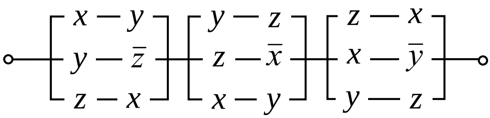


$N = 6$

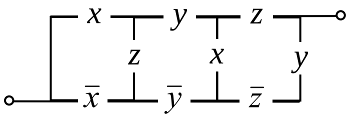
б)



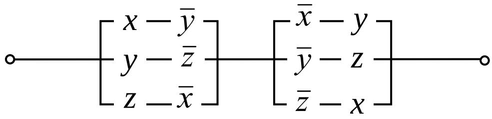
$N = 4$

15. а) 

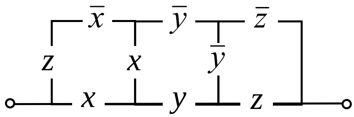
$N = 3$

б) 

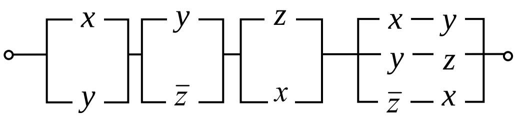
$N = 5$

16. а) 

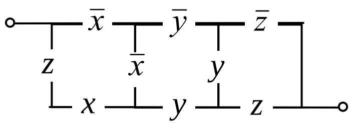
$N = 6$

б) 

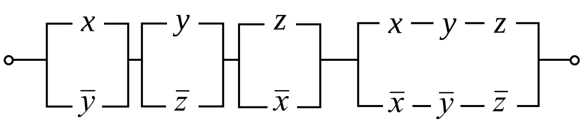
$N = 5$

17. а) 

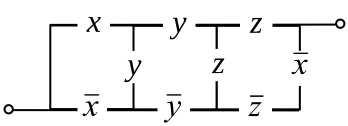
$N = 4$

б) 

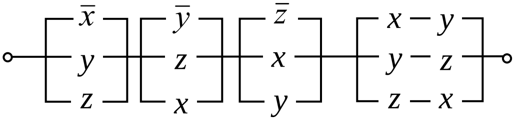
$N = 4$

18. а) 

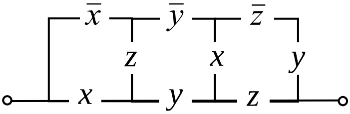
$N = 6$

б) 

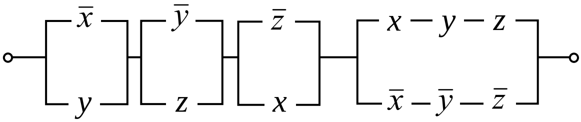
$N = 4$

19. а) 

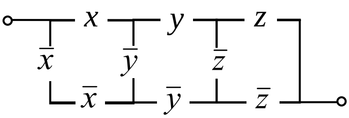
$N = 5$

б) 

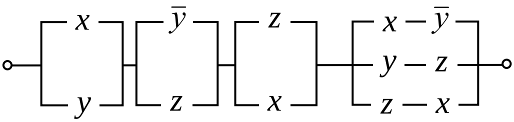
$N = 5$

20. а) 

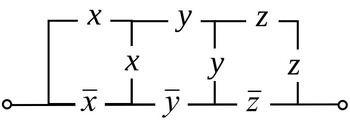
$N = 6$

б) 

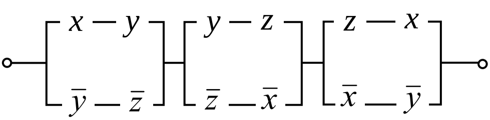
$N = 4$

21. а) 

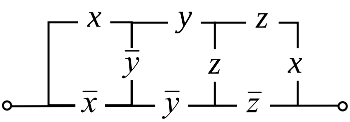
$N = 4$

б) 

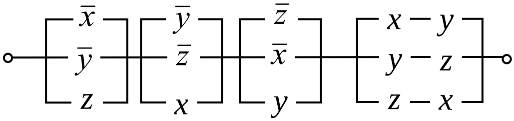
$N = 4$

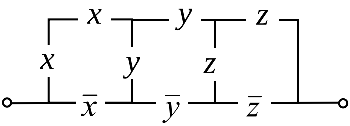
22. а) 

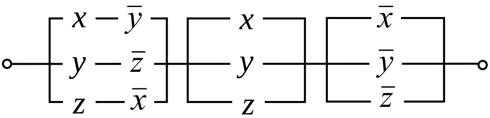
$N = 6$

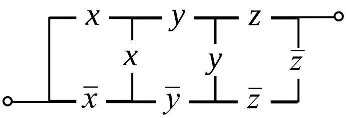
б) 

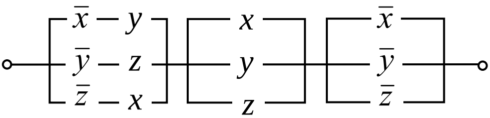
$N = 4$

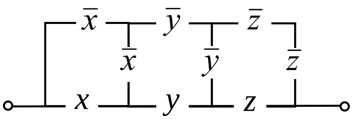
23. а)  $N = 3$

б)  $N = 4$

24. а)  $N = 6$

б)  $N = 4$

25. а)  $N = 6$

б)  $N = 4$

7. НАХОЖДЕНИЕ СЛЕДСТВИЙ ИЗ ЗАДАННЫХ ПОСЫЛОК

Из заданных посылок $F_1, F_2, ..., F_m$ может вытекать некоторое множество следствий H_i. В силу определения логического следствия, для нахождения всех неравносильных между собой следствий надо найти все случаи одновременной истинности посылок $F_1, F_2, ..., F_m$ и, пользуясь произволом H в остальных случаях, найти все неравносильные между собой H_i. Удобнее всего это сделать следующим образом: надо найти совершенную конъюнктивную нормальную форму $F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_m$ и из её дизъюнктивных одночленов образовать все возможные совершенные конъюнктивные нормальные формы. В случае, если $F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_m \cong 1$, то есть когда $F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_m$ не имеет совершенной конъюнктивной нормальной формы, то есть является тавтологией, множество следствий из $F_1, F_2, \ldots, F_m$ будет состоять только из тавтологии.

Пример. Найти все неравносильные между собой следствия из посылки:

"Если у четырёхугольника две противоположные стороны параллельны и они же равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм. У данного четырёхугольника две противоположные стороны равны или параллельны".

Решение. Используя аппарат алгебры высказываний, запишем данные посылки F_1, F_2 в виде сложных высказываний. *Обозначим*:

1) у четырёхугольника две противоположные стороны параллельны – a;

2) у четырёхугольника эти же противоположные стороны равны – b;

3) четырёхугольник является параллелограммом – c.

Заданные посылки: $F_1 = a \& b \to c$, $F_2 = b \vee a$.

$$F_1 \& F_2 = ((a \& b) \to c) \& (b \vee a) \cong (\overline{a \& b} \vee c) \& (b \vee a) \cong$$
$$\cong (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (b \vee a) \cong (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}).$$

Отсюда логическими следствиями из заданных посылок F_1, F_2 будут:

$$H_1 = \bar{a} \vee \bar{b} \vee c, \quad H_2 = a \vee b \vee c, \quad H_3 = a \vee b \vee \bar{c},$$
$$H_4 = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)\,\&\,(a \vee b \vee c),$$
$$H_5 = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)\,\&\,(a \vee b \vee \bar{c}),$$
$$H_6 = (a \vee b \vee c)\,\&\,(a \vee b \vee \bar{c}),$$
$$H_7 = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)\,\&\,(a \vee b \vee c)\,\&\,(a \vee b \vee \bar{c}).$$

З а д а ч а 7

Найти все неравносильные между собой следствия из посылок.

1. а) Если целое число делится на 2, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3. Если целое число делится на 3, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2.

б) Если система векторов линейно зависима, то один из векторов линейно выражается через остальные векторы. Если ранг равен числу векторов системы, то система векторов линейно независима.

2. а) Если сумма двух слагаемых – четное число, то оба слагаемых – четные числа или оба – нечетные числа. Если оба слагаемых – нечетные числа, то сумма – четное число.

б) Если боковые стороны треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный. Если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.

3. а) Если в треугольнике боковые стороны и углы при основании равны, то этот треугольник является равнобедренным. Если в треугольнике углы при основании равны, то равны и его боковые стороны.

б) Если a делится на c и b делится на c, то $a + b$ делится на c. Если $a + b$ делится на c, то a делится на c тогда и только тогда, когда b делится на c.

4. а) Если параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Если параллелограмм является квадратом, то он является и прямоугольником.

б) Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима. Если система векторов линейно независима, то она не содержит двух одинаковых векторов и нулевого вектора.

5. а) Если диагонали параллелограмма не равны, то он не является квадратом. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то он является квадратом тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

б) Если в треугольнике медиана является высотой и биссектрисой, то этот треугольник – равнобедренный. Если медиана является высотой, то медиана является и биссектрисой.

6. а) Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Если целое число делится на 6, то оно делится на 2.

б) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

7. а) Если формула является выполнимой, то она является тавтологией или не является противоречием. Если формула – тавтология, то она не является противоречием.

б) Если прямые a и b параллельны друг другу, то a будет параллельна плоскости α тогда и только тогда, когда b будет параллельна плоскости α. Если прямые a и b параллельны плоскости α, то они параллельны друг другу.

8. а) Если матрица является невырожденной и ее определитель отличен от нуля, то матрица обладает обратной. Если матрица невырожденная, то ее определитель отличен от нуля.

б) Если две прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны, то они являются скрещивающимися. Если прямые скрещиваются, то они не пересекаются.

9. а) Если система векторов линейно независимая и является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Если система векторов линейно зависима, то она не является базисом.

б) Если все стороны треугольника равны, то этот треугольник – равносторонний. Если все углы треугольника равны, то этот треугольник – равносторонний.

10. а) Если целое число оканчивается нулем, то оно делится на 5. Если целое число оканчивается цифрой 5, то оно делится на 5.

б) Если параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Если параллелограмм является квадратом, то он является и прямоугольником.

11. а) Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится и на 6. Если число не делится на 3, то оно не делится на 6.

б) Если прямые a и b параллельны друг другу, то a перпендикулярна плоскости α тогда и только тогда, когда b перпендикулярна плоскости α. Если прямые a и b перпендикулярны плоскости α, то они параллельны друг другу.

12. а) Если плоскости α и β параллельны и прямая a перпендикулярна α, то a перпендикулярна и плоскости β. Если плоскости α и β параллельны и прямая a перпендикулярна β, то a перпендикулярна и плоскости α. Если прямая a перпендикулярна плоскостям α и β, то плоскости α и β параллельны.

б) Если функция дифференцируема, то она является выпуклой вниз тогда и только тогда, когда производная монотонно возрастает. Если функция не является выпуклой вниз, то ее производная не является монотонно возрастающей функцией.

13. а) Если A и B – квадратные матрицы порядка n (то есть имеют n строк и n столбцов), то $A \cdot B$ – также квадратная матрица порядка n. Если A – квадратная матрица порядка n, то $A \cdot B$ является квадратной тогда и только тогда, когда B – квадратная матрица порядка n.

б) Если треугольник – равнобедренный, то углы при его основании равны. Если треугольник –– равнобедренный, то его боковые стороны равны друг другу тогда и только тогда, когда равны углы при основании.

14. а) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Если противоположные стороны четырехугольника параллельны, то они равны.

б) Если определитель системы из n линейных уравнений с n неизвестными равен нулю, то система неразрешима или имеет бесконечное множество решений. Если система из n линейных уравнений с n неизвестными неразрешима, то ее определитель равен нулю.

15. а) Если прямые a и b параллельны друг другу, то прямая l будет параллельна a тогда и только тогда, когда l будет параллельна b. Если b параллельна a, то l параллельна b тогда и только тогда, когда прямые a и b параллельны друг другу

б) Если все данные посылки – тавтологии, то формула F является логическим следствием из этих посылок тогда и только тогда, когда F – тавтология. Если формула F – тавтология, то она является логическим следствием из данных посылок.

16. а) Если $a \cdot b$ – четное и a – нечетное число, то b – четное число. Если a – нечетное число, то $a \cdot b$ является четным тогда и только тогда, когда b – четное число.

б) Если две строки определителя совпадают или отличаются только знаком, то определитель равен нулю. Если определитель отличен от нуля, то он не содержит двух одинаковых строк.

17. а) Если прямые a и b параллельны друг другу и a параллельна плоскости α, то и b параллельна плоскости α. Если прямые a и b параллельны плоскости α, то они параллельны между собой. Если прямые a и b параллельны друг другу и b параллельна плоскости α, то a параллельна плоскости α.

б) Если целое число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Если целое число не делится на 2, то оно не делится на 6.

18. а) Если функция дифференцируема, то она монотонно возрастает тогда и только тогда, когда ее производная положительна. Если производная функции положительна, то эта функция является монотонно возрастающей.

б) Если a и b – целые числа, то $a + b$ – целое число. Если a – целое, то $a + b$ является нецелым числом тогда и только тогда, когда b – нецелое число.

19. а) Если прямая перпендикулярна к диаметру окружности и проходит через его конец, то она является касательной к окружности. Если прямая не перпендикулярна к диаметру, то она не является касательной к окружности.

б) Если два числа равны или отличаются знаком, то их модули совпадают. Если модули двух чисел не совпадают, то эти числа не равны друг другу.

20. а) Если треугольник – равнобедренный, то его боковые стороны равны. Если треугольник – равнобедренный, то углы при его основании равны.

б) Если a делится на c или b делится на c, то произведение $a \cdot b$ делится на c. Если a делится на c, то произведение $a \cdot b$ делится на c.

21. а) Если оба слагаемых являются одновременно четными числами или одновременно нечетными числами, то их сумма

– четное число. Если сумма не является четным числом, то оба слагаемых не могут быть одновременно четными числами.

б) Если четырехугольник – параллелограмм, то он является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали взаимно перпендикулярны. Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он – не ромб.

22. а) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны. Если треугольники подобны, то две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника.

б) Если определитель системы из n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Если ранг системы совпадает с числом неизвестных, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

23. а) Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Если целое число делится на 3 и не делится на 2, то оно не делится на 6.

б) Если плоскости α и β параллельны, то прямая a будет перпендикулярна α тогда и только тогда, когда прямая a будет перпендикулярна β. Если плоскости α и β не параллельны друг другу, то прямая a не может быть одновременно перпендикулярной α и β.

24. а) Если треугольник – равнобедренный, то высота, опущенная на основание, является медианой. Если треугольник – равнобедренный, то высота, опущенная на основание, является биссектрисой.

б) Если подсистема векторов линейно независима, то она является базисом тогда и только тогда, когда каждый вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы. Если каждый вектор исходной системы линейно выражается через векторы подсистемы, то эта подсистема является базисом тогда и только тогда, когда она линейно независима.

25. а) Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны или делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб. Если параллелограмм – не ромб, то его диагонали не делят углы пополам.

б) Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

8. Исчисление высказываний

Логическая система ***исчисления высказываний*** – это аксиоматическое представление алгебры высказываний. Аксиоматическое построение теории предполагает вывод рассматриваемых в теории формул из конечного числа аксиом при помощи ***правил вывода*** (ПВ). В качестве аксиом выбираются тождественно истинные формулы алгебры высказываний. Аксиоматический подход дает возможность построения логической системы без учета содержательной интерпретации рассматриваемых формул.

Определение 1. Понятие ***формулы*** определяется следующим образом:

1) каждая пропозициональная переменная является формулой;

2) если F, F_1 и F_2 – формулы, то $\overline{F}$, $(F_1 \to F_2)$ – также являются формулами;

3) других формул нет.

В качестве аксиом выбираются следующие формулы:

(*A*1) $F \to (G \to F)$;

(*A*2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

(А3) $(\overline{G} \to \overline{F}) \to ((\overline{G} \to F) \to G)$.

где *F*, *G*, *H* – произвольные формулы.

Основным правилом вывода является ***правило заключения***: из формулы *F* и формулы $F \to G$ следует формула *G*.

Определение 2. ***Выводом формулы*** F ***из множества формул*** *Г* называется конечная последовательность формул $B_1, B_2, ..., B_s = F$, каждая из которых является либо аксиомой, либо формулой из множества *Г*, либо получена из предыдущих формул этой последовательности по правилу вывода. Элементы множества *Г* называются ***гипотезами*** или ***посылками вывода***, а формула *F* – ***выводимой из множества формул Г***.

Обозначение выводимости: $\Gamma \vdash F$.

Определение 3. Формула *F* называется ***доказуемой***, если существует конечная последовательность формул $B_1, B_2, ..., B_s$, где $B_s = F$, каждая из которых является либо аксиомой, либо формулой, полученной из предшествующих формул этой последовательности при помощи правила вывода. Формула *F* в этом случае называется ***теоремой***, а последовательность B_i – ***доказательством теоремы*** *F*.

Обозначение теоремы: $\vdash F$.

Вывод формул и доказательство многих теорем значительно упрощается в результате применения ***основных теорем исчисления высказываний***. Такими являются следующие теоремы.

Теорема 1 (***о дедукции***). *Если из гипотез* $F_1, F_2, ..., F_n$ *выводима формула G, то из гипотез* $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ *выводима* *формула* $F_n \to G$*, то есть*

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G \quad \Rightarrow \quad F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \vdash F_n \to G .$$

Т е о р е м а 2 . *Для любых формул F и G следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний:*

а) $\overline{\overline{F}} \to F$;

б) $F \to \overline{\overline{F}}$;

в) $(F \to G) \to (\overline{G} \to \overline{F})$.

Формулы а) и б) из теоремы 2 называются ***законами двойного отрицания***, а формула в) – ***законом контрапозиции***.

Пример 1. При помощи теоремы о дедукции доказать выводимость следующей формулы из данных гипотез.

$$a \to (b \to c),\ a \to b \ \vdash a \to c .$$

Решение. Сначала к гипотезам $a \to (b \to c)$ и $a \to b$ добавим новую гипотезу *a* и получим вывод функции *c*. То есть построим последовательность формул, которая будет выводом формулы *c*:

1) $a \to (b \to c)$ – гипотеза;

2) $(a \to b)$ – гипотеза;

3) a – новая гипотеза;

4) $(b \to c)$ – получена из (3) и (1) по ПВ;

5) b – получена из (2) и (3) по ПВ;

6) c – получена из (5) и (4) по ПВ.

Таким образом, построим вывод формулы *c* из данных гипотез и новой гипотезы *a,* то есть доказали выводимость

$$a \to (b \to c),\ a \to b,\ a \vdash c.$$

Тогда, применяя теорему о дедукции, получим доказуемую выводимость

$$a\to(b\to c),\ a\to b\ \vdash a\to c.$$

Вывод формулы c можно также изобразить в виде дерева вывода:

$$\dfrac{\dfrac{a,\ a\to b}{b}\qquad \dfrac{a,\ a\to(b\to c)}{b\to c}}{c}.$$

Задача 8

При помощи теоремы о дедукции доказать выводимость следующих формул из данных гипотез.

1. $(a\to b)\to a,\ a\to c\ \vdash (a\to b)\to c$.

2. $(a\to a)\to b,\ a\to(b\to c)\ \vdash a\to c$.

3. $a\to(a\to b),\ b\to c\ \vdash a\to c$.

4. $a,\ b\to c\ \vdash (a\to b)\to c$.

5. $(a\to a)\to a,\ b\to c\ \vdash (a\to b)\to c$.

6. $a\to(b\to c),\ (b\to c)\to b\ \vdash a\to c$.

7. $(b\to c)\to a,\ a\to b\ \vdash (b\to c)\to c$.

8. $(a\to a)\to a,\ a\to b\ \vdash (b\to c)\to c$.

9. $a\to b,\ b\to(b\to c)\ \vdash a\to c$.

10. $a\to(a\to b),\ b\to(a\to c)\ \vdash a\to c$.

11. $(a\to a)\to a,\ b\to(b\to c),\ a\ \vdash (a\to b)\to c$.

12. $a,\ b\to(b\to c)\ \vdash (a\to b)\to c$.

13. $(a\to a)\to(a\to b),\ b\to c\ \vdash a\to c$.

14. $a\to(a\to b),\ b\to(b\to c)\ \vdash a\to c$.

15. $a\to b,\ b\to((a\to a)\to c)\ \vdash a\to c$.

16. $a\to((a\to a)\to b),\ b\to c\ \vdash a\to c$.

17. $a \to (a \to b),\ a \to (b \to c) \vdash a \to c$.

18. $(a \to a) \to (a \to b),\ a \to (b \to c) \vdash a \to c$.

19. $a \to b,\ (a \to a) \to (b \to c) \vdash a \to c$.

20. $a \to (a \to (a \to b)) \vdash a \to c$.

21. $b,\ a \to (a \to (b \to c)) \vdash a \to c$.

22. $a \to (b \to (a \to c)),\ (b \to (a \to c)) \to b \vdash a \to c$.

23. $a \to b,\ a \to (a \to (b \to c)) \vdash a \to c$.

24. $a \to (a \to (b \to c)),\ (a \to (b \to c)) \to b \vdash a \to c$.

25. $b \to c,\ a \to (a \to (a \to b)) \vdash a \to c$.

Пример 2. При помощи законов двойного отрицания и теоремы о дедукции доказать, что следующая формула является теоремой исчисления высказываний:

$$(b \to a) \to (b \to \bar{\bar{a}}).$$

Решение. Сначала докажем, что из гипотез $(b \to a)$ и b выводима формула $\bar{\bar{a}}$:

1) $(b \to a)$ – гипотеза;

2) b – гипотеза;

3) a – получена из (1) и (2) по ПВ;

4) $a \to \bar{\bar{a}}$ – теорема, закон двойного отрицания;

5) $\bar{\bar{a}}$ – получена из (3) и (4) по ПВ.

Таким образом, получили вывод формулы $\bar{\bar{a}}$, то есть доказали выводимость $(b \to a),\ b \vdash \bar{\bar{a}}$.

Применяя дважды теорему о дедукции, получим сначала выводимость

$$(b \to a) \vdash (b \to \bar{\bar{a}}),$$

затем $\vdash (b\to a)\to(b\to\bar{\bar{a}})$.

Задача 9

При помощи законов двойного отрицания и теоремы о дедукции доказать, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний.

1. $\vdash (a\to b)\to(\bar{\bar{a}}\to b)$.
2. $\vdash b\to((b\to a)\to\bar{\bar{a}})$.
3. $\vdash \bar{\bar{a}}\to((a\to\bar{\bar{b}})\to b)$.
4. $\vdash\left(\overline{\bar{\bar{a}}\to a}\right)$.
5. $a\to b,\ \bar{\bar{a}}\vdash\bar{\bar{b}}$.
6. $a\to b,\ \bar{b}\to\bar{\bar{c}}\vdash a\to c$.
7. $\vdash (a\to(b\to c))\to((a\to\bar{\bar{b}})\to(a\to c))$.
8. $\vdash (a\to b)\to((a\to(b\to\bar{\bar{c}}))\to(\bar{\bar{a}}\to c))$.
9. $\vdash (b\to a)\to((b\to(a\to c))\to(b\to\bar{\bar{c}}))$.
10. $\vdash \bar{\bar{a}}\to(\bar{\bar{b}}\to a)$.
11. $\vdash (a\to b)\to(\bar{\bar{a}}\to\bar{\bar{b}})$.
12. $\vdash \bar{\bar{a}}\to((a\to\bar{\bar{b}})\to b)$.
13. $\vdash b\to(\bar{\bar{a}}\to\bar{a})$.
14. $\vdash (a\to(b\to c))\to(\bar{\bar{b}}\to(a\to\bar{\bar{c}}))$.
15. $\vdash (a\to(\bar{\bar{b}}\to\bar{\bar{c}}))\to(\bar{\bar{a}}\to(b\to c))$.
16. $\vdash (a\to(b\to\bar{\bar{c}}))\to((a\to b)\to(\bar{\bar{a}}\to c))$.
17. $\vdash (b\to\bar{\bar{a}})\to(b\to a)$.

18. $\vdash (\bar{\bar{a}} \to b) \to (a \to b)$.

19. $\vdash b \to ((b \to \bar{\bar{a}}) \to a)$.

20. $\vdash a \to ((\bar{\bar{a}} \to b) \to b)$.

21. $\vdash a \to ((\bar{\bar{a}} \to b) \to \bar{\bar{b}})$.

22. $a \to \bar{\bar{b}},\ b \to \bar{\bar{c}} \vdash \bar{\bar{a}} \to c$.

23. $\bar{\bar{a}} \to b,\ b \to \bar{\bar{c}} \vdash a \to c$.

24. $a \to b \vdash (b \to \bar{\bar{c}}) \to (\bar{\bar{a}} \to c)$.

25. $\vdash (\bar{\bar{a}} \to (\bar{\bar{b}} \to \bar{\bar{c}})) \to (b \to (a \to c))$.

Пример 3. При помощи закона контрапозиции и теоремы о дедукции доказать следующую теорему:

$$\vdash (a \to b) \to ((\bar{c} \to \bar{b}) \to (\bar{\bar{a}} \to c)).$$

Решение. Построим сначала вывод формулы c из гипотез $(a \to b)$, $\bar{c} \to \bar{b}$, $\bar{\bar{a}}$:

1) $(a \to b)$ – гипотеза;

2) $(\bar{c} \to \bar{b})$ – гипотеза;

3) $\bar{\bar{a}}$ – гипотеза;

4) $\bar{\bar{a}} \to a$ – заключение двойного отрицания;

5) a из (3) и (4) по ПВ;

6) b из (1) и (5) по ПВ;

7) $(\bar{c} \to \bar{b}) \to (b \to c)$ – заключение контрапозиции;

8) $(b \to c)$ – из (2) и (7) по ПВ;

9) c – из (6) и (8) по ПВ.

Таким образом, получили, вывод формулы c, то есть доказали выводимость

$$(a \to b),\ \bar{c} \to \bar{b},\ \bar{\bar{a}}\ \vdash C.$$

Применяя последовательно теорему о дедукции, получим:

$$(a \to b),\ (\bar{c} \to \bar{b}) \vdash \bar{\bar{a}} \to c; \qquad (a \to b) \vdash (\bar{c} \to \bar{b}) \to (\bar{\bar{a}} \to c);$$

$$\vdash (a \to b) \to ((\bar{c} \to \bar{b}) \to (\bar{\bar{a}} \to c)).$$

Задача 10

При помощи закона контрапозиции и теоремы о дедукции доказать следующие теоремы:

1. $\vdash (a \to b) \to ((\bar{c} \to b) \to (a \to \bar{\bar{c}}))$.
2. $\vdash (a \to b) \to ((a \to (\bar{c} \to \bar{b})) \to (a \to c))$.
3. $\vdash (a \to b) \to ((a \to (c \to \bar{b})) \to (a \to \bar{c}))$.
4. $\vdash (\bar{b} \to a) \to ((b \to c) \to (\bar{a} \to c))$.
5. $\vdash (\bar{b} \to a) \to (\bar{a} \to b)$.
6. $\vdash (\bar{b} \to \bar{a}) \to (\bar{\bar{a}} \to b)$.
7. $\vdash (\bar{b} \to \bar{a}) \to ((b \to c) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
8. $\vdash (b \to \bar{a}) \to ((\bar{b} \to c) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
9. $\vdash (a \to (b \to c)) \to ((\bar{b} \to \bar{a}) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
10. $\vdash (a \to (\bar{c} \to \bar{b})) \to ((\bar{b} \to \bar{a}) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
11. $\vdash (\bar{b} \to a) \to ((\bar{c} \to \bar{b}) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
12. $\vdash (\bar{c} \to \bar{b}) \to ((b \to a) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
13. $\vdash (\bar{c} \to \bar{b}) \to ((\bar{\bar{a}} \to b) \to (a \to c))$.
14. $\vdash (\bar{c} \to b) \to ((a \to \bar{b}) \to (a \to \bar{\bar{c}}))$.
15. $\vdash (a \to (\bar{c} \to \bar{b})) \to ((a \to b) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.
16. $\vdash (a \to (c \to \bar{b})) \to ((\bar{\bar{a}} \to b) \to (a \to \bar{c}))$.

17. $\vdash (b \to \bar{\bar{c}}) \to ((\bar{b} \to a) \to (\bar{a} \to c))$.

18. $\vdash \bar{a} \to ((\bar{b} \to a) \to b)$.

19. $\vdash \bar{\bar{a}} \to ((\bar{b} \to \bar{a}) \to b)$.

20. $\vdash (b \to c) \to ((\bar{b} \to \bar{a}) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.

21. $\vdash (\bar{b} \to c) \to ((b \to \bar{a}) \to (a \to \bar{\bar{c}}))$.

22. $\vdash (\bar{b} \to \bar{a}) \to ((a \to (b \to c)) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.

23. $\vdash a \to ((\bar{b} \to \bar{a}) \to \bar{\bar{b}})$.

24. $\vdash a \to ((b \to \bar{a}) \to \bar{b})$.

25. $\vdash (a \to \bar{b}) \to ((c \to b) \to (\bar{\bar{a}} \to \bar{c}))$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.* Математическая логика. Курс лекций. Задачник – практикум и решения: Учебное пособие. 3 – е изд., испр. – СПб.:Издательство «Лань», 2008. – 288 с.

2. Дискретная математика: Теория, задачи, приложения / *Я.М. Ерусалимский*. – 7-е изд. – М.: Вузовская книга, 2005. – 268 с.: ил.

3. *Игошин В.И.* Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб.пособие для студ. высш.учеб.заведений / В.И.Игошин. – 2-е изд.,стер. –М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.

4. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб.пособие для студ. высш.учеб.заведений / В.И.Игошин. –М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 448 с.

5. *Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е.* Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 128 с.

6. Математическая логика и теория алгоритмов. Ч. I: Метод. указания / А.В.Садыков. – Нижнекамск: НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2016. – 60 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Садыков Айдар Вагизович
кандидат технических наук, доцент

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ПРАКТИКУМ

Корректор Белова И.М.
Худ. редактор Фёдорова Л.Г.

Сдано в набор 02.02.16.
Подписано в печать 03.02.16.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3. Тираж 100 экз.
Заказ №39.

НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а